This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

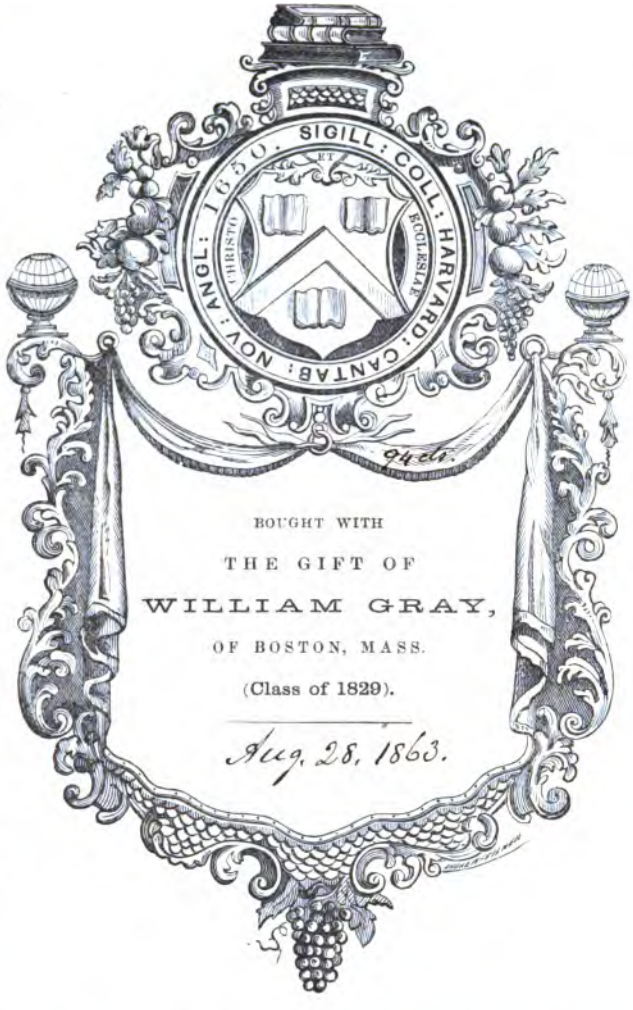
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math
3003
2

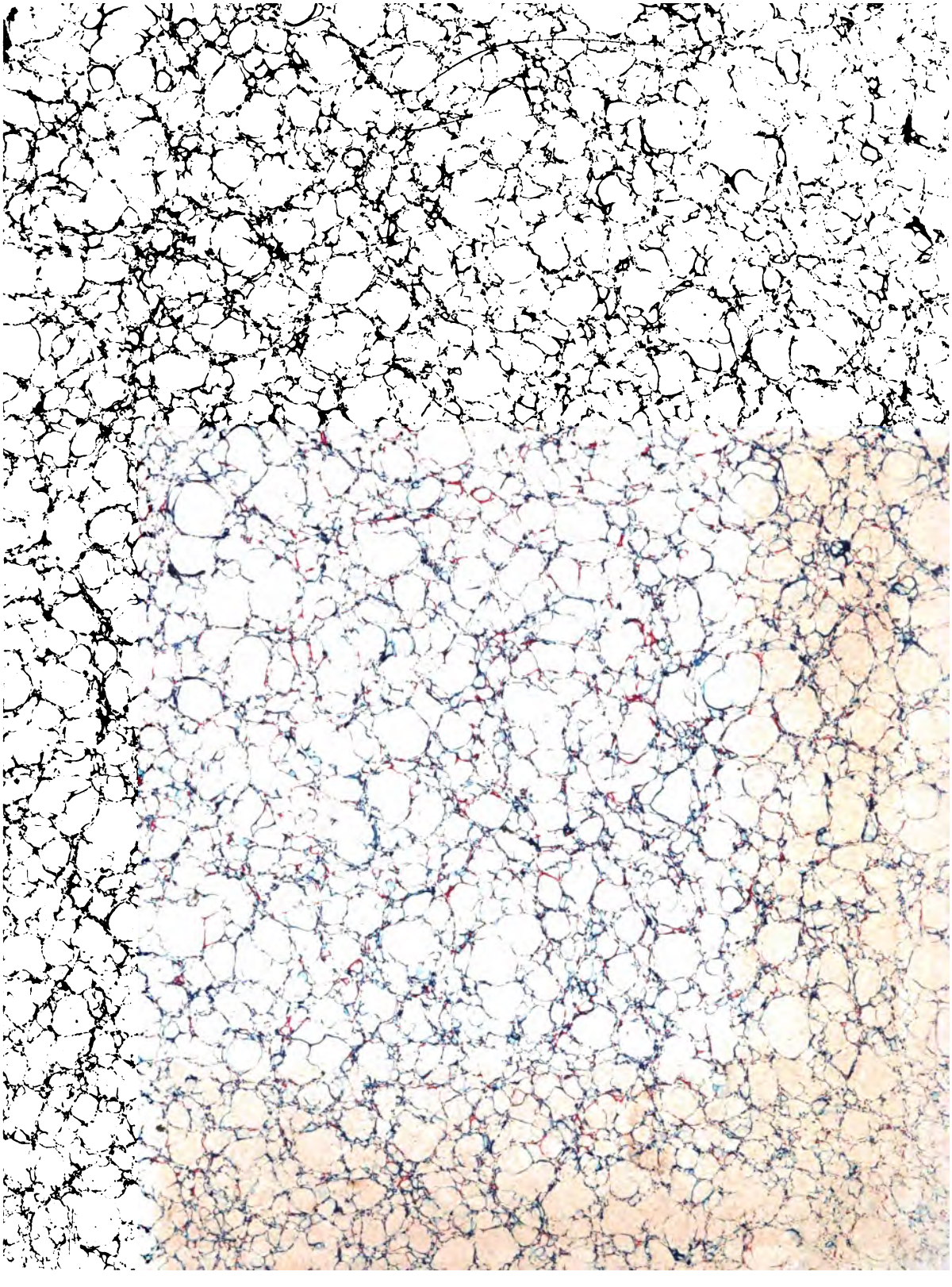
Math 3003.2



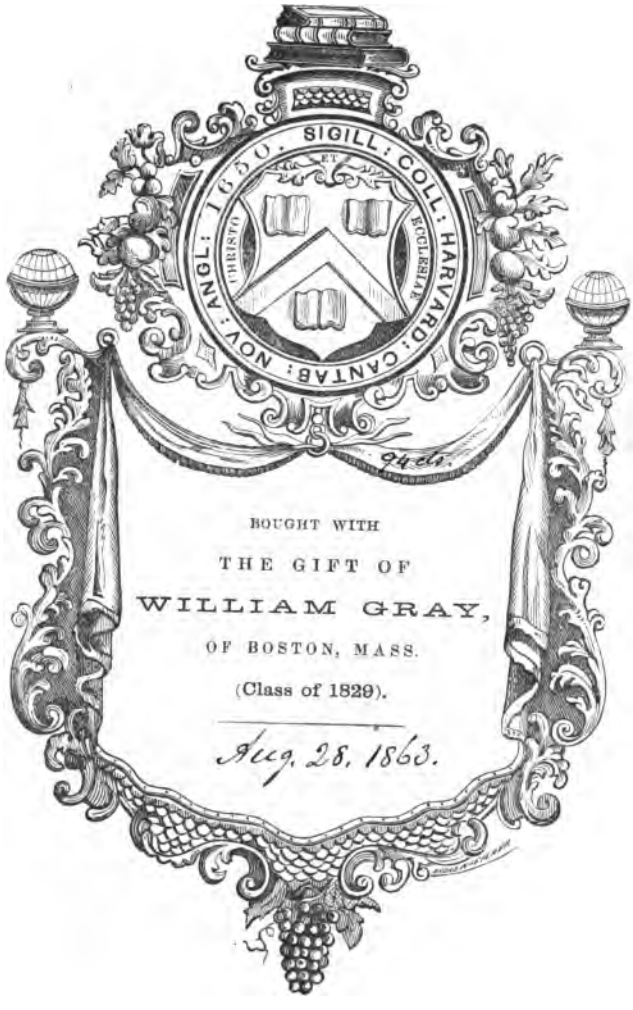
94 cl.

BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).

Aug. 28, 1863.



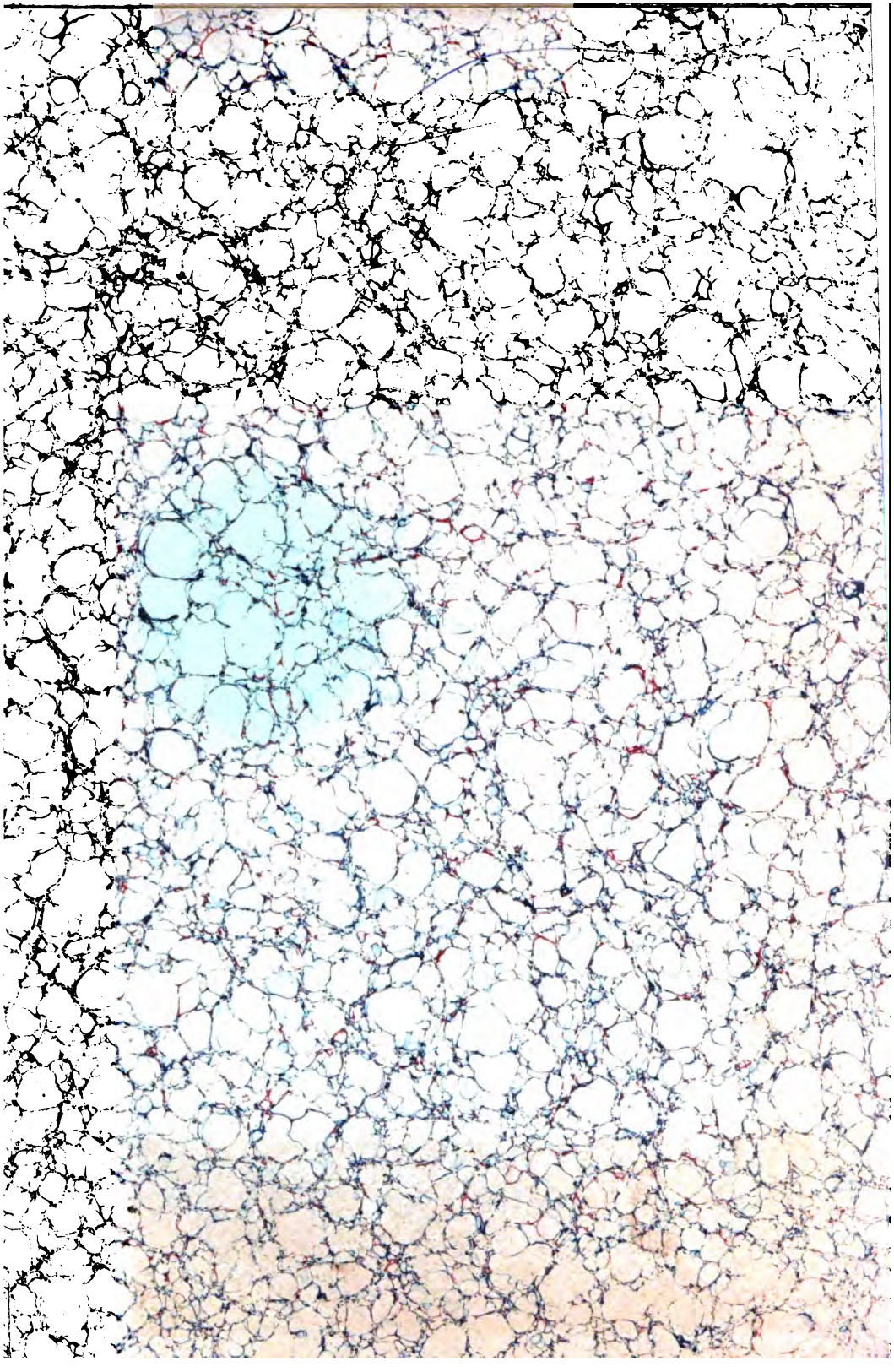
Math 3003.2



94 cb.

BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).

Aug. 28, 1863.



Die Entdeckung

der

Differentialrechnung

durch

Leibniz

mit Benutzung der Leibnizischen Manuscripte auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover

dargestellt von

Dr. C. J. Gerhardt.

Halle,

H. W. Schmidt.

1848.

Math 3003.2

.94

Der Streit über den eigentlichen Erfinder der Differentialrechnung, zuerst im Jahre 1669 durch Fatio de Duillier angeregt, hat in Unterbrechungen fast bis auf die neueste Zeit fortgedauert. Verletzter Ehrgeiz, Nationaleifersucht, versteckte Angriffe, persönliche Beleidigungen erbitterten sogleich anfangs die Gemüther zu sehr, als dass eine ruhige Prüfung der streitigen Punkte hätte stattfinden können. Dazu kam Unsicherheit und Unklarheit hinsichtlich der Auffassung des Princips der neuen Rechnung, ein Umstand, durch den der angefachte Hader oft neue Nahrung erhielt. Die beiden grossen Männer, die sich in den Ruhm, Entdecker der höhern Analysis zu sein, theilen, hatten leider vor dem Beginn des Streites auch nicht das Geringste über den Ursprung dieser wichtigen Entdeckung veröffentlicht und schieden vom Schauplatze des Kampfes, ohne durch eine gründlich documentirte Darstellung zu zeigen,

wie sie die neue Rechnung fanden. Da nun Alles das, was während des Streites von beiden Seiten bekannt gemacht wurde, nur als Parteischriften ohne volle Gültigkeit betrachtet werden konnte, so blieb die Frage, wer der eigentliche Entdecker der höhern Analysis sei und ob einer von dem andern etwas entlehnt, ungelöst. Ihre Lösung ist besonders von französischen Mathematikern wiederholt versucht worden, aber sie musste unvollständig bleiben, in sofern man sich lediglich auf die durch den Druck bekannt gemachten Aktenstücke beschränkte. Zwar hatten Newton's Freunde dafür gesorgt, dass alle kleinern Schriften desselben, deren Bekanntmachung er bei Lebzeiten unterlassen hatte, veröffentlicht wurden, und man darf annehmen, da auch Brewster, der neueste Biograph Newton's, nichts von hinterlassenen, der Bakanntmachung werthen Manuscripten erwähnt, dass von dieser Seite Alles vorliegt, was zur Entscheidung der Frage beigebracht werden kann. Anders verhielt es sich aber mit Leibniz. Er hatte noch vor seinem Tode das *Commercium epistolicum D. Joannis Collins et aliorum de analysi promota, jussu Societatis Regiae in lucem editum*, wodurch die Frage lediglich zu Gunsten Newton's entschieden wurde, als unvollständig und parteiisch bezeichnet, uud eine unparteiische Darstellung des Ursprungs der Differentialrechnung versprochen; doch der Tod ereilte ihn, ehe er sein Wort gelöst, denn die unter seinen nachgelassenen Manuscripten aufgefundene *Historia et origo calculi differentialis* kann nur als Parteischrift angesehen werden.

Wenn nun auch in neuester Zeit namentlich deutsche Mathematiker die subjective Ueberzeugung gewonnen haben, dass Leibniz und Newton, beide selbstständig die höhere Analysis entdeckten und zwar der letztere etwas früher, als jener, so verlangt dennoch mit Recht die Geschichte der Wissenschaft eine genaue objective Erörterung über die Art und Weise der Entdeckung, und zwar von deutscher Seite um so mehr, da der in der Hitze des Streites gegen Leibniz geschleuderte Verdacht, vielleicht von Newton etwas entlehnt und somit ein Plagiat begangen zu

haben — ein Verdacht, der wenn auch nur leise angedeutet, hier und da immer wieder auftaucht — noch niemals gründlich widerlegt worden ist. Demnach ist es keineswegs die Absicht, den alten Hader von neuem zu beginnen — was ausdrücklich ausgesprochen sein mag — sondern wir meinen den Manen Leibnizens es schuldig zu sein, unsern grossen Landsmann von solch ungerechter Beschuldigung vollständig zu befreien.

Dies kann auf zwiefache Weise geschehen: indirekt durch die vollständige Veröffentlichung der Correspondenz zwischen Leibniz und Oldenburg; denn da Leibniz und Newton niemals in persönliche Berührung gekommen, so konnte nur auf diesem Wege Leibniz über die Resultate, die Newton gefunden, in Kenntniss gesetzt werden. Ein zweiter, bei weitem schwierigerer Weg zu einer gründlichen Rechtfertigung Leibnizens war eine genaue Durchsicht der von ihm hinterlassenen mathematischen Manuscripte, die in der Königlichen Bibliothek zu Hannover in grosser Vollständigkeit aufbewahrt werden. Durch die hohe Fürsorge Sr. Excellenz des Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Herrn Dr. Eichhorn, so wie durch die preiswürdige Munificenz der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin zu einem längern Aufenthalt in Hannover ausgerüstet und durch die ausgezeichnete Liberalität der Königlichen Bibliothekbehörde daselbst auf das wünschenswertheste gefördert, wurde es mir möglich, die Leibnizischen Manuscripte mathematischen Inhalts einer sorgfältigen Revision zu unterwerfen. Die nach mehrjähriger, freilich oft unterbrochener Arbeit gewonnenen Resultate über den fraglichen Gegenstand lege ich hier den Männern der Wissenschaft zur Beurtheilung vor.

Im Anhange habe ich mehrere bisher ungedruckte Manuscripte als Beläge meiner Darstellung über die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz mitgetheilt. Sie sind diplomatisch genau in durchaus unveränderter Gestalt wiedergegeben. Bei der Auswahl derselben unter der grossen Anzahl, die in die Zeit von 1675 bis 1677 fielen, haben mich namentlich zwei Gesichtspunkte geleitet: einmal dass auf dem

Manuscript genau der Tag oder im Allgemeinen die Zeit der Abfassung bemerkt war, wobei ich besonders darauf achtete, dass das verzeichnete Datum mit derselben Dinte geschrieben war, wie das ganze Manuscript; und zweitens, dass durch dasselbe zugleich auch ein Fortschritt in der Entdeckung der Differentialrechnung sich ergab. Sie sind sämmtlich von der Art, dass sie nicht den mindesten Zweifel übrig lassen, dass Leibniz durchaus selbstständig bei ihrer Abfassung gearbeitet hat.

Salzwedel, im Januar 1848.

Dr. Gerhardt.

Die Entdeckung der Differentialrechnung

durch Leibniz.

Leibniz wurde durch logische Untersuchungen zum Studium der Mathematik geführt und fasste frühzeitig, von der Evidenz der Wissenschaft ergriffen, eine entschiedene Vorliebe für die mathematischen Disciplinen. Leider lag das Studium der Mathematik um die Mitte des 17. Jahrhunderts auf den Universitäten Deutschlands so darnieder, dass man nicht über die Elemente der Wissenschaft hinauskam. In Leipzig, wo Leibniz seine akademischen Studien begann, las ein gewisser Joh. Kühn über die Elemente Euclid's; die Vorträge desselben waren aber so dunkel, dass ausser Leibniz keiner der Zuhörer folgen konnte. Es wird erzählt, dass er allein sich mit dem Docenten in Discussionen über den Vortrag einliess und alsdann seinen Mitzuhörern die Lehrsätze verständlich machte. Von Leipzig begab sich Leibniz auf ein halbes Jahr nach Jena, wo Erhard Weigel Mathematik vortrug. Auch dieser stand keineswegs auf der Höhe der Wissenschaft, und hat sich zu seiner Zeit mehr durch Anwendung der Mathematik auf philosophische Doctrinen und durch mancherlei bizarre mechanische Entwürfe einen Na-

men gemacht *). Indessen scheint der Umgang mit diesem Manne nicht ohne nachhaltigen Eindruck auf Leibniz gewesen zu sein; er stand in fortdauernder literärischer Verbindung mit ihm. — Demnach blieben die Entdeckungen und Erweiterungen, womit im Laufe des 17. Jahrhunderts die berühmten Geometer Frankreichs, Englands und Italiens die mathematischen Wissenschaften bereichert hatten, Leibniz durchaus unbekannt, und es ist nicht zu verwundern, dass er in seiner ersten mathematischen Schrift: *De arte combinatoria. Lips.* 1666. über die Elemente der Mathematik nicht hinausgeht. In den folgenden Jahren wurde Leibniz als Rath in dem Dienste des Churfürsten von Mainz durch Berufsgeschäfte zu sehr in Anspruch genommen, als dass er seinen Lieblingsstudien grosse Aufmerksamkeit hätte widmen können. Indesen beweist die Anknüpfung eines Briefwechsels mit Männern, wie Otto v. Guericke, dem gelehrten Jesuiten Honoratus Fabri in Rom, und andern, so wie die Uebersendung seiner kleinen Schrift: *Hypothesis physica nova* (die im Jahre 1671 erschien) an die neu gegründeten gelehrten Gesell-

---

*) Weigel's Haus wird in einem bekannten Distichon unter den so genannten sieben Wunderwerken Jenas aufgezählt: es hatte keine Treppen, ihre Stelle vertrat ein Sessel, auf welchem man vermittelst einer Winde von einem Stockwerke in das andere befördert wurde. — Auf einer Reise durch Holland besuchte Weigel auch den berühmten Hugens, der an Leibniz folgendes über ihn schreibt: *Avant hier me vint voir icy le Sr. Weigelius, professeur a Jena, qui m'entretint de ses grands desseins pour l'avancement des sciences et qui paroit extremement satisfait de certaines demonstrations qu'il pretend avoir de l'existence de Dieu et de la Providence. Je l'iray voir à la Haye, où il dit avoir un cousin rempli de ressorts et autres curiositez qu'il veut me montrer. Il dit qu'il a l'honneur de vous connoitre depuis le temps que vous estudiez en mathematiques sous luy. J'aimerois bien mieux voir icy son disciple etc.* — Ein wahrhaftes Verdienst hat sich Weigel dadurch erworben, dass er zuerst die allgemeine Einführung des Gregorianischen Calenders in Deutschland anregte. Siehe Guhrauer im Leben Leibniz. Theil 2. S. 185.

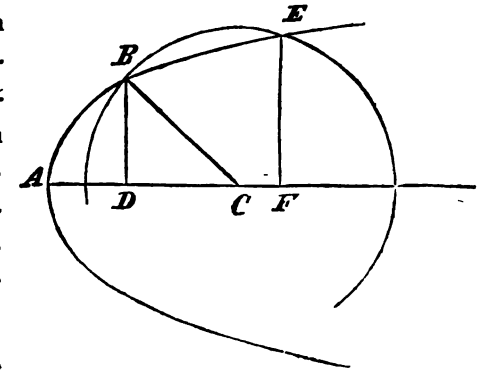
schaften zu London und Paris, dass der strebsame Geist Leibnizens in Erfüllung von Berufsgeschäften keineswegs Befriedigung fand. Deshalb war es für ihn von der unschätzbarsten Wichtigkeit, dass er, in der schönsten Periode geistiger Regsamkeit, durch die Vermittelung seines Gönners, des Baron von Boineburg, mit einer politischen Sendung nach Paris beauftragt wurde. Leibniz gelangte Ende März 1672 in Paris an und gewann bald Gelegenheit, nach allen Seiten hin Verbindungen mit den berühmtesten Männern der damaligen Zeit, die Ludwig XIV. zur Verherrlichung seines Namens an seinen Hof gezogen hatte, anzuknüpfen, und seine glühende Wissbegier zu befriedigen (Beilage I.).

Leibniz kam hier zuerst mit Männern in Berührung, die entweder vollkommen auf der Höhe der Wissenschaft standen, oder selbst zu ihrer Erweiterung beigetragen hatten. Deshalb wollen wir, ehe wir in der Entwickelung des mathematischen Bildungsganges Leibnizens fortfahren, zuvor einen Blick auf den damaligen Zustand der mathematischen Wissenschaften werfen, um zu sehen, wie bald dieser mächtige Geist die ganze Wissenschaft erfasste und schaffend und fortschreitend eingriff.

Durch Vieta und Descartes hatte zu Anfang des 17. Jahrhunderts der Theil der Geometrie, welcher von den Curven handelt, eine ganz veränderte Gestalt erhalten. Während jener durch Einführung von Buchstabencoëfficienten statt der bis dahin fast durchgängig üblichen Ziffern in der Algebra allgemeine Ausdrücke schuf und durch geometrische Construction algebraischer Gleichungen die Verbindung zwischen Algebra und Geometrie anbahnte, vollendete der letztere den durch Vieta begonnenen Bau dadurch, dass er durch die Anwendung von Coordinaten eine allgemeine Behandlungsweise in der Geometrie der Curven möglich machte. Den grossen Geometern des Alterthums war es zwar gelungen, auf rein geometrischem Wege die Eigenschaften einzelner Curven, wie der Spirale und der Kegelschnitte zu entdecken, indess waren sie nur durch

sinnreiche Kunstgriffe, die auf andere Curven keine Anwendung fanden und für jede neue Curve neu geschaffen werden mussten, dahin gekommen; dadurch aber, dass Descartes zuerst die Natur der Curven durch Gleichungen darzustellen versuchte und so die Eintheilung derselben in verschiedene Ordnungen begründete, dadurch war zugleich die Möglichkeit gegeben, ganze Gruppen von krummen Linien auf dieselbe Weise zu behandeln. Es darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass Descartes von einer eigenthümlichen Eintheilung der Curven, in geometrische und mechanische, ausgeht und nur die erstern in seiner Geometrie in Betracht zieht. Daher sind denn auch seine Methoden zur Untersuchung der Eigenschaften krummer Linien nicht allgemein, und sein Verfahren, die Tangenten der Curven zu finden, das er *„problema eorum quae scio utilissimum et generalissimum"* (Geomet. lib. II.) nennt, nur auf die einfachsten krummen Linien anwendbar. Aber auch hiervon abgesehen, hat diese Methode Descartes' etwas Gekünsteltes und ist in ihrer Anwendung nicht ohne Schwierigkeit. Wir wollen sie an einem einfachen Beispiele erläutern.

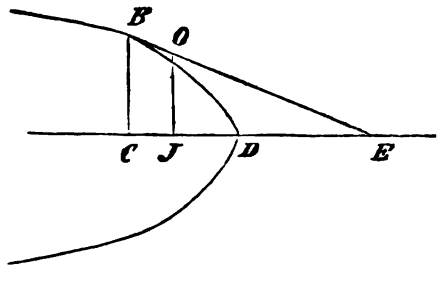
Es sei die Tangente der Parabel ABE zu finden. Man beschreibe einen Kreis um einen beliebigen Punkt C der Abscissenaxe, der die Curve in den Punkten B und E schneidet. Ist die Gleichung der Parabel $y^2 = px$, wo p den Parameter bezeichnet, und ist r der Radius des Kreises, und setzt man $AC = a$, $BD = y$, $AD = x$, so ist $y^2 = r^2 - (a-x)^2$, mithin wird $px = r^2 - a^2 + 2ax - x^2$ sein. Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von x, so erhält man $x^2 +$



$(p-2a)x + a^2 - r^2 = 0$, eine Gleichung des zweiten Grades, deren beide Wurzeln den Ordinaten BD und EF entsprechen werden. Nun ist der Fall denkbar, dass die Werthe der Constanten p, a, r, von welchen die beiden Wurzeln lediglich abhängen, von der Beschaffenheit sind, dass diese Wurzeln gleich werden, d. h. dass die beiden Durchschnittspunkte des Kreises mit der Parabel in einen zusammenfallen, in welchem Falle offenbar die Tangente des Kreises zugleich auch die Tangente der Parabel sein wird. Um die Werthe der Constanten p, a, r für diesen Fall zu finden, nimmt Descartes eine Gleichung des zweiten Grades an, deren Wurzeln einander gleich sind. Eine solche ist $x^2 - 2ex + e^2 = 0$, die aus $(x-e)(x-e) = 0$ entsteht. Durch Gleichsetzung der Glieder, die in beiden Gleichungen mit denselben Potenzen von x behaftet sind, erhält man die Gleichung $2a - p = 2e = 2x$, woraus sich ergiebt $a - x = \frac{1}{2}p$. Für den Fall also, dass die beiden Durchschnittspunkte des Kreises mit der Parabel zusammenfallen, wird die Subnormale gleich dem halben Parameter sein, folglich die Subtangente gleich der doppelten Abscisse. Durch die Subtangente ist aber auch zugleich die Tangente gegeben.

Als die Geometrie Descartes' im Jahre 1637 erschien, worin er seine Ideen über die Geometrie der Curven zuerst veröffentlichte, war bereits Fermat, ohnstreitig der ausgezeichnetste Mathematiker seiner Zeit, im Besitz seiner berühmten Regel *de maximis et minimis*. So nannte er nämlich das analytische Verfahren, dessen er sich nicht bloss zur Bestimmung der Maxima und Minima, sondern in fast allen seinen mathematischen Untersuchungen bediente. Vielleicht hatte ihn die Bemerkung darauf geführt, dass bei einfach gekrümmten Curven die Ordinate des Punktes, in welchem die Curve vom Wachsen zum Abnehmen fortgeht, die grösste in Bezug auf die ihr zunächst stehenden ist und dass die Werthe dieser letztern sich dem ihrigen ins Unbegränzte nähern. Um also zu untersuchen, ob die durch eine Gleichung gegebene Curve in irgend

einem Punkte, dessen Abscisse x, ein Maximum habe, setzte Fermat $x = x \pm e$, wo e eine unendlichkleine Grösse bezeichnet, und es musste nun für den Fall eines Maximums der so erhaltene Ausdruck dem gegebenen gleich sein. In der auf diese Weise gewonnenen Gleichung unterdrückte er die beiden Seiten gemeinsamen Glieder, dividirte durch e so oft als möglich und setzte die mit e alsdann noch behafteten Glieder als unendlich klein in Bezug auf die übrigen $= 0$; aus der übrigbleibenden Gleichung ergab sich der Werth für die Abscisse des Maximums. — Mittelst desselben Princips hat nun auch Fermat die Tangenten der Curven bestimmt, und zwar auf ähnliche Weise, wie Descartes, durch die Subtangente. Der Vergleichung wegen, und da hierin das analytische Verfahren Fermat's besonders deutlich hervortritt, soll seine Methode durch die Bestimmung der Tangente der Parabel erläutert werden. Fermat



nimmt an, dass die Tangente BE die Axe der Curve im Punkte E schneidet und zeigt, dass CE den Werth der Subtangente der Parabel hat. Zu dem Ende zieht er ausser der Ordinate BC des Berührungspunktes B noch eine Senkrechte OJ von einem Punkte O der Tangente in der Nähe des Berührungspunktes auf die Axe; alsdann ist $CD : JD > BC^2 : OJ^2$, mithin auch $> CE^2 : JE^2$. Diese Verhältnisse werden sich jedoch um so mehr der Gleichheit nähern, je weniger der Punkt O von B entfernt ist, d. h. OJ^2 wird mit BC^2, und JE^2 mit CE^2 zusammenfallen, wenn die Abscisse CD in die um eine unendlichkleine Grösse CJ verminderte Abscisse JD übergeht. Ist nun $CE = a$, $CD = b$, $CJ = e$, so wird $JD = b - e$ und $JE^2 = (a-e)^2$, folglich $(b-e)a^2 = b(a-e)^2$, woraus sich $a = 2b$ als der Werth der Subtangente der Parabel ergiebt.

Ungeachtet der Mängel, die dieser Tangentenmethode Fermat's offenbar anhaften und ihre allgemeine Anwendbarkeit verhindern, beweist dennoch das zu Grunde liegende Princip den eminenten Geist ihres Erfinders, der es verstand, mit den Anfängen der algebraischen Analyse, wie sie Vieta geschaffen, die Strenge der Geometrie des Alterthums zu verbinden. Wenn aber die Ersten unter den französischen Mathematikern, Laplace, Lagrange, Fourier, welchen sich in neuester Zeit Arago angeschlossen hat, Fermat's Regel *de maximis et minimis* und die darauf basirte Tangentenmethode desselben mit dem durchaus allgemeinen Verfahren der Differentialrechnung in Parallele stellen, und Fermat als den eigentlichen Erfinder (*premier inventeur*) der Differentialrechnung betrachtet wissen wollen, so bedarf es für jeden, der mit dem Wesen der Differentialrechnung nur einigermassen bekannt ist, keiner weitern Auseinandersetzung, dass zu solchem Urtheil die französische Nationaleitelkeit ohnstreitig ein Hauptmotiv gewesen ist. Merkwürdiger Weise enthalten die Raisonnements *) dieser ausgezeichneten Männer nicht allein die Gründe, weshalb eben Fermat die Ehre dieser Erfindung abgesprochen werden muss, sondern es liegt auch zugleich darin die Nichtachtung eines der wichtigsten Mittel, die der Mathematik zu ihrer Vervollkommnung und zur Erfindung neuer Theorien zu Gebote stehen, denn Fermat's Verfahren entbehrt jedes Algorithmus, während die so äusserst glücklich gewählte Zeichensprache der Differentialrechnung die allgemeine An-

---

*) Laplace sagt (*Traité des probabilités, introduct.* p. XXX): *On voit, qu'il (Fermat) savait étendre sa methode aux fonctions irrationelles, en se débarrassant des irrationalités, par l'élévation des radicaux aux puissances. On doit donc regarder Fermat, comme le véritable inventeur du calcul différentiel*; und Lagrange (*Leçons sur le calcul des fonctions* p. 321): *Il (Fermat) fait disparaître dans cette équation les radicaux et les fractions s'il y en a.*

wendbarkeit, so wie die schnelle Anerkennung und Ausbreitung derselben auf das überraschendste vermittelt hat.

Es ist bekannt, mit welchem Enthusiasmus die Methoden Descartes' und Fermat's von den Mathematikern des 17. Jahrhunderts aufgenommen wurden. Zu den eifrigsten Verehrern des erstern gehörte Florimond de Beaune, der sich besonders dadurch einen Namen in der Geschichte der Wissenschaft erworben hat, dass er zur Entstehung des sogenannten umgekehrten Tangentenproblems Veranlassung gab. De Beaune legte nämlich im Jahre 1641 dem Descartes folgende Aufgabe vor: eine krumme Linie der Art zu finden, dass die Ordinaten sich zur Subtangente verhalten, wie eine gegebene Linie zu demjenigen Stück der Ordinate, welches zwischen der krummen Linie und einer unter einem gegebenen Winkel geneigten Linie enthalten ist. Die Lösung dieser Aufgabe überstieg die Kräfte der Methode des Descartes; ja sie ist nicht ohne Schwierigkeit für die Methoden der höhern Analysis; indessen wusste Descartes doch einige Eigenschaften der fraglichen krummen Linie nebst der Construction derselben anzugeben, ohne aber die Art und Weise, wie er dazu gelangt war, bekannt zu machen. Wir werden in der Folge sehen, dass Leibniz bei der Behandlung dieses umgekehrten Tangentenproblems den Algorithmus der Differentialrechnung zuerst eingeführt hat.

Eine Hauptschwierigkeit in der Anwendung der Tangentenmethode Descartes' lag in der Bestimmung der zwei gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung; sie wurde durch Hudde zum Theil beseitigt. Auf der andern Seite erleichterten Hugens und de Sluze den Gebrauch der Fermat'schen Regel, ohne dass eine Substitution von $x \pm e$ für x nöthig war *). Alle diese Abkürzun-

*) Da de Sluze's Regel für die Bestimmung der Tangente im Folgenden öfters erwähnt wird, so mag sie hier an einem Beispiel erläutert werden. Ebenso wie Fermat gewinnt auch de Sluze den Werth für die Tangente mittelst

gen fanden jedoch nur Anwendung, wenn die gegebene Gleichung von gebrochenen und irrationalen Ausdrücken befreit war.

Von der Tangentenmethode Barrow's, die derselbe in seinen *Lectionibus geometricis* Londin. 1674 bekannt machte, hat Leibniz vor der Bekanntmachung der Differentialrechnung keine Kenntniss gehabt. Er erwähnt sie nirgends in den aus dieser Periode sehr zahlreich vorhandenen Manuscripten *).

Fast gleichzeitig mit der Revolution, die Descartes in der Geometrie der Curven bewirkte, hatte ein anderer Theil der Geometrie, die Lehre von der Quadratur und Cubatur, durch Cavaleri's Methode des Untheilbaren eine bedeutende Erweiterung erhalten. Das Verfahren, dessen sich die Geometer des Alterthums zur Quadratur krummlinig begränzter Ebenen bedienten, hat man mit Unrecht Exhaustionsmethode genannt, denn es kann demjenigen, der die Schriften Euclid's und Archimed's aufmerksam studirt, nicht

---

der Subtangente. Es soll demnach der Ausdruck für die Subtangente der Curve gefunden werden, die durch die Gleichung

$$x^3 - 2x^2y + bx^2 - b^2x + by^2 - y^3 = 0$$

gegeben ist. Zu dem Ende bringt de Sluze alle mit y behafteten Glieder auf eine Seite und multiplicirt jedes mit dem entsprechenden Exponenten von y; darauf multiplicirt er jedes Glied, das x enthält, mit dem entsprechenden Exponenten von x und dividirt den ganzen Ausdruck durch x. Das Resultat der mit y behafteten Glieder durch das letztere dividirt giebt den Ausdruck für die Subtangente; demnach wird durch den Quotienten

$$\frac{-3y^3 + 2by^2 - 2x^2y}{3x^2 - 4xy + 2bx - b^2}$$

der Werth der Subtangente der in Rede stehenden Curve ausgedrückt werden.

*) *Je reconnois que M. Barrow est allé bien avant, mais je puis vous assurer, Monsieur, que je n'ay tiré aucun secours pour mes methodes. — Comme j'ay reconnu publiquement, en quoy j'estois redevable à M. Hugens et à l'egard des series infinies à M. Newton, j'en aurois fait autant à l'egard de M. Barrow, si j'y avois puisé.* Aus einem Briefe Leibnizens an den Marquis de l'Hospital im Jahre 1694.

entgehen, dass diese, obwohl ein jeder ein Axiom als Princip zu Grunde legt, dennoch jedes hierher gehörige Problem auf verschiedene Weise behandeln, und nur die erhaltenen Resultate in der Regel durch indirekte Beweise mittelst in- und umschriebener Polygone auf das evidenteste zu erhärten suchen. Dieses Hülfsmittel zum Beweise betrachtete man, als man im 16. Jahrhundert die Schriften der griechischen Geometer wieder zu studiren begann, als die Hauptsache; unbekümmert um die strengen Beweise, in denen die Geistesschärfe der Geometer des Alterthums besonders sich zeigt, schloss man jede krummlinig begränzte Ebene durch in- und umschriebene Polygone ein, die durch unendliche Verdoppelung ihrer Seiten jener gegebenen Grösse als gemeinsame Gränze ins Unbestimmte sich näherten, und schuf so erst eine Methode. Dessenohngeachtet war die Anwendung dieses Verfahrens mit zu vielen Schwierigkeiten verknüpft. Besonders zeigte sich das Bedürfniss nach einem mehr direkten Verfahren, als Keppler in der *Stereometria doliorum* den Geometern eine Reihe von Problemen, die Kubirung neuer Körper betreffend, zur Lösung vorlegte. In Folge dieser Anregung fand Cavaleri seine Methode des Untheilbaren, die er in dem Werke: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.* Bonon. 1635. veröffentlichte. Obwohl man sogleich erkannte, dass dieses Verfahren jeder mathematischen Strenge entbehrte, so nahm man dennoch, erfreut ein bequemes Mittel erhalten zu haben, zu ihm allgemein seine Zuflucht, und suchte sich von der Zuverlässigkeit der mittelst derselben erhaltenen Resultate auf andere Weise zu überzeugen. So blieb die Methode des Untheilbaren bis zur Erfindung der höhern Analysis das alleinige Mittel zur Quadratur krummlinig begränzter Ebenen und zur Kubatur von krummen Flächen eingeschlossener Körper. Im Laufe des 17. Jahrhunderts trat zwar die ursprüngliche Cavaleri'sche Methode in den Hintergrund, und die grossen Geometer, Pascal, Roberval, Fermat in Frankreich, Wallis in England, zerlegten die krummlinig begränzten Ebenen

und die von krummen Flächen eingeschlossenen Körper in Theile, die sich wie die Glieder einer ins Unendliche abnehmenden Reihe zu einander verhielten, so dass zuletzt die Summirung solcher Reihen die Hauptsache wurde; im Princip jedoch geschah keine Aenderung. Als eine Modification der Methode des Untheilbaren ist auch das Verfahren zu betrachten, das Gregorius a S. Vincentio in seinem Werke: *Contemplatio curvilineorum, nec non examen quadrat. Lugd. Batav.* 1632*) zu Grunde gelegt hat und von ihm *ductus plani in planum* genannt wurde. —

Das war im Allgemeinen der Zustand der mathematischen Disciplinen, die damals besonders die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich zogen, als Leibniz in Paris eintraf. Der Umstand, dass die politischen Aufträge, welche die Sendung Leibnizens nach Paris veranlassten, keinen günstigen Ausgang hatten, trug vielleicht dazu bei, dass Leibniz sich um so mehr Ruhm auf dem Gebiete des Wissens zu erwerben suchte. Er begrub sich nicht allein in Bibliotheken, um in alten seltenen Urkunden Geschichte zu studiren, es erwachte auch die alte Neigung für seine Lieblingswissenschaft, die Mathematik, von neuem. Er erhielt Kenntniss von der Rechenmaschine Pascal's; dies gab Veranlassung, das Modell einer vollkommneren, als jene, zu erfinden. Dadurch lenkte er die Aufmerksamkeit des Ministers Colbert auf sich, und dieser veranlasste wahrscheinlich, dass Leibniz dasselbe der unlängst gegründeten Akademie der Wissenschaften zur Prüfung vorlegte. So wurde (vielleicht?) Leibniz mit dem berühmten Hugens bekannt, der auf Einladung Ludwigs XIV. seit 1666 als eine Hauptzierde der

*) Weder dies noch das andere Werk des Gregorius: *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni. Antwerp.* 1647 habe ich bisher einsehen können. Beide scheinen mir für den mathematischen Bildungsgang Leibnizens von Wichtigkeit zu sein; er nennt sie unter den Werken, durch welche er in die höhere Mathematik eingeführt worden ist.

Akademie und höchste mathematische Autorität in Paris lebte. Dieses Zusammentreffen macht für Leibnizens ferneren mathematischen Bildungsgang Epoche. Es konnte nicht fehlen, dass Hugens sehr bald das ausserordentliche Talent des jungen aufstrebenden Mannes erkannte, und er, der Meister in der Wissenschaft, konnte keinen trefflicheren Schüler finden. Dies Verhältniss von Meister und Schüler blieb fortan zwischen den beiden grossen Männern. Leibniz legte stets die neuen Ergebnisse seiner mathematischen Untersuchungen Hugens zur Prüfung vor, und ohngeachtet dieser öfters sehr scharf critisirte, so blieb die Freundschaft doch ungetrübt, und Leibniz hat zu jeder Zeit auf das dankbarste anerkannt, dass er durch ihn in die höhere Mathematik eingeführt worden ist*). Hugens gab damals gerade sein ausgezeichnetes Werk: *Horologium oscillatorium*, heraus, und machte Leibniz ein Exemplar zum Geschenk. Hieraus ersah Leibniz, wie sehr er noch Laie in seiner Lieblingswissenschaft war; sein Eifer, das bisher Versäumte nachzuholen, entbrannte aufs höchste. In ihren wissenschaftlichen Unterhaltungen kamen sie auch auf die Eigen-

---

*) So schreibt Leibniz an den Marquis de l'Hospital ($^{14}/_{24}$ Juin 1695), als das Gerücht von Hugens' Erkranken zu ihm gedrungen war: *J'ay oui dire que M. Hugens a esté un peu malade. Je luy écriray au premier jour, esperant qu'il se portera mieux. Sa conservation nous importe infiniment. Et il luy faudroit encor à plus juste titre qu'à moy des jeunes gens capables de profiter de ses avis et de l'aider à executer pensées. Apres Galilei, Kepler et des Cartes, c'est luy qu'on doit nommer. C'est aussi à luy apres ceux là, à qui j'ay le plus d'obligation. Je n'ay pas oublié de le temoigner publiquement dans les rencontres. Et j'ay fort estimé en luy outre la connoissance profonde qu'il a, la sincerité qu'il a fait paroistre dans les occasions, en rendant justice aux autres. Apres avoir connu par vostre entremise, Monsieur, l'usage de mon calcul, il pouviot aisement le travestir et l'accommoder aux expressions anciennes; mais il en a usé tout autrement etc.*

schaften der Zahlen, ein Gebiet, worauf sich Leibniz besonders bewegt hatte. Vielleicht um das Talent seines neuen Schülers zu prüfen, legte ihm Hugens folgendes Problem vor: die Summe einer abnehmenden Reihe von Brüchen zu finden, deren Zähler sämmtlich = 1, deren Nenner die Triangularzahlen sind. Leibniz fand das richtige Resultat, dass nämlich die Summe dieser Reihe = 2 ist.

Leibnizens Umgang mit Hugens und seine Studien auf dem Gebiete der höhern Mathematik wurden jedoch bald durch eine Reise nach London unterbrochen, die er im Januar des Jahres 1673 im Gefolge des Churmainzischen Gesandten, des Baron von Schönborn, antrat. Ohngeachtet der speciellen Aufträge, die Leibniz hier für die Boineburgische Familie auszuführen hatte, wusste er dennoch Zeit zu erübrigen, um die Bekanntschaft der berühmten Männer Englands, die damals in der Hauptstadt lebten, zu machen. Mit Oldenburg, dem Secretär der Londoner Societät, stand er schon seit dem Jahre 1670 in Correspondenz. Eine Liebhaberei für die Chemie*) vermochte ihn die Bekanntschaft des ausgezeichneten Chemikers Boyle zu suchen. Hier traf er mit dem Mathematiker Pell zusammen. Das Gespräch kam auf die Eigenschaften der Zahlen und Leibniz erwähnte, dass er eine Methode besitze, Zahlreihen mit Hülfe ihrer Differenzen zu summiren. Als er sich näher darüber aussprach, entgegnete ihm Pell, dass dieses Verfahren sich schon in einem Buche Mouton's: *De diametris apparentibus Solis et Lunae*, fände. Leibniz hatte dieses Werk bisher nicht gekannt; er lieh es sich eilends von Oldenburg, durchlief es und

*) damals als Alchemie eine sehr beliebte Wissenschaft auch unter hochgestellten Männern, besonders des Goldmachens wegen. Leibniz selbst war eine kurze Zeit Secretär einer alchemistischen Gesellschaft in Nürnberg. Guhrauer im Leben Leib. Theil I. S. 46 ff.

fand zu seiner Genugthuung, namentlich um den Verdacht eines Plagiats von sich abzuwehren, dass Mouton auf andere Weise zu demselben Resultat gelangt war, und dass seine Methode allgemeiner sei*). Bei dieser Anwesenheit in London legte Leibniz auch das Modell seiner Rechenmaschine der Königlichen Societät vor, und er wurde in Folge dessen zum Mitglied derselben einstimmig gewählt (9. April 1673). Aus den Briefen, die Leibniz unmittelbar nach seiner Rückkehr nach Paris (Anfang März 1673) an Oldenburg schrieb, geht hervor, dass er mit keinem berühmten Manne Englands ausser den genannten bei seinem diesmaligen Aufenthalte in London zusammengetroffen war; namentlich ergiebt sich aus einem Briefe Oldenburgs vom 6. April 1673, dass Leibniz damals nicht die Bekanntschaft von Collins gemacht hat **).

Durch Pell war Leibniz auch auf das im Jahr 1666 erschienene Werk Mercator's: *Logarithmotechnia*, aufmerksam gemacht worden, besonders wegen der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, die Mercator hierin mit Hülfe der Methode des Untheilbaren Cavaleri's dargethan hatte. Leibniz nahm es mit sich nach Paris, und begann nun unter Hugens Anleitung mit dem lebhaftesten Eifer das Studium der höhern Mathematik in ihrem ganzen Umfange. Die Geometrie des Descartes, die er bisher nur sehr oberflächlich kannte, die *Synopsis Geometrica* des Honoratus Fabri, die Schriften des Gregorius a S. Vincentio, die Briefe Pascal's über die Cycloide waren seine Führer. In einem Manuscript vom August 1673 mit der Ueberschrift: *Methodus nova investigandi Tangentes linearum curvarum ex datis applicatis, vel contra Applicatas ex datis pro-*

*) Siehe das Schreiben Leibnizens an Oldenburg vom 3. Februar 1673. *Leib. op. omn. ed. Dutens. Tom. III. p.* 16 *sqq.*

**) Dies ist von Wichtigkeit, weil Collins um Newton's Entdeckungen in der höhern Mathematik wusste. Siehe Brewster im Leben Newtons, deutsch. Uebersetz. S. 154.

ductis, reductis, Tangentibus, perpendicularibus, secantibus, beginnt Leibniz sogleich mit dem Versuch, ein auf jede Curve anwendbares Verfahren für die Bestimmung der Tangente derselben zu finden*). Er betrachtet die Curve als ein Polygon von unendlich vielen Seiten und construirt schon hier das von ihm sogenannte *triangulum characteristicum* zwischen einem unendlich kleinen Bogen der Curve, der Differenz der Ordinaten und Abscissen, das dem Dreieck zwischen Tangente, Subtangente und Ordinate des Berührungspunktes ähnlich ist. Ebenso wie Descartes will nun Leibniz mittelst der Subtangente die Tangente finden; er bezeichnet die unendlich kleine Differenz der Abscissen mit *b*, und überzeugt sich an der Parabel, dass sein Verfahren zu einem richtigen Resultat führt, wenn die Glieder der Gleichung, in welcher die unendlich kleinen Grössen vorkommen, vernachlässigt werden. Die Vernachlässigung dieser Glieder scheint jedoch Leibniz unsicher zu sein **), und er sucht auf einem andern Wege zur Bestimmung der Subtangente zu gelangen. *Tota quaestio est,* lauten seine eignen Worte, *quomodo ex differentiis duarum applicatarum ipsae inveniri queant applicatae;* er findet, dass die Lösung dieses Problems auf der Summation einer Reihe beruht, deren Glieder aus den Differenzen der auf einanderfolgenden Abscissen bestehen. Gegen Ende des Manuscripts kommt Leibniz auf das umgekehrte Problem zu sprechen: *Regressus,* sagt er, *an haberi possit a Tan-*

---

*) *Quodsi figura Geometrica non est,* sagt Leibniz mit Bezug auf die Eintheilung der Curven, die Descartes für seine Tangentenmethode zu Grunde gelegt hatte, *ut Cyclois, nil refert, tractabitur enim ad Geometricae exemplum fingendo rectarum cum curvis ex quibus factae sunt notam nobis esse comparationem; nec ideo minus Tangens sive Geometrica sive ageometrica ducetur, prout figurae natura patitur.*

**) Seine Worte sind: *Non est tutum, ipsius infinite parvi b multiplos* (sic!) *ab initio rejicere, aliaque, fieri enim potest, ut eorum cum aliis compensatione in alium plane statum veniat aequatio.*

gentibus aut aliis functionibus ad ordinatas, quaestio est magna. Res est accuratissime investiganda, per Canones aequationum, ut appareat quot modis aliquid produci possit ex aliis aequationibus, et quaenam postea ex illis eligi debeat. Est quaedam ipsius Analyseos Analysis, sed in qua profecto consistit Apex scientiae humanae, in hoc quidem genere rerum. — Zuletzt hat Leibniz folgendes Resultat gewonnen: *Duae quaestiones, una de invenienda descriptione curvae ex ejus elementis, altera de invenienda figura ex datis differentiis, altera redigi potest in eandem. Hinc intelligi potest fere totam doctrinam de methodo tangentium inversa revocabilem videri ad quadraturas.* Demnach ist Leibniz schon um die Mitte des Jahres 1673 zu der Erkenntniss gelangt, dass das directe und das so genannte umgekehrte Tangentenproblem in einem gewissen Zusammenhange stehen; er ahnt, dass das letztere sich auf Quadraturen (d. h. auf Summationen) zurückführen lässt. In einem Manuscript vom October 1674 überschrieben: *Schediasma de Methodo Tangentium inversa ad circulum applicata,* kommt er darüber zur Gewissheit; *ajo,* sagt er, *ex Methodo Tangentium inversa sequi figurarum omnium quadraturas, atque ita scientiam de summis et quadraturis, quod ante a nemine ne speratum est quidem, analyticam reddi posse.*

Nachdem Leibniz also die Identität zwischen dem umgekehrten Tangentenproblem, dessen allgemeine Lösung von Descartes nicht gefunden war, und der Quadratur der Curven erkannt hatte, wandte er sich zur Untersuchung von Reihen, durch deren Summirung man damals zur Quadratur gelangte. In einer sehr umfangreichen Abhandlung vom October 1674 überschrieben: *Schediasma de serierum summis, et seriebus quadratricibus,* geht Leibniz von der Reihe $\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \ldots$ aus und findet folgende allgemeine Regeln: *Appellando,* sind seine Worte, *ordinatas*

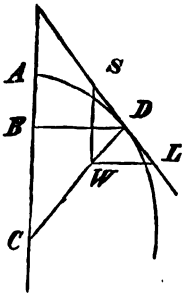
inconstantes x, abscissas inconstantes y, abscissam b maximae ordinatae e, abscissam d minimae ordinatae h, fient regulae:

$$\frac{x^2}{2} = ywx - \frac{yw^2}{2} + \frac{d^2h}{2}\text{*)}$$

$$\frac{h^2w}{2} + \frac{d^2h}{2} = xy - \frac{x}{2},\ e - h = w,$$

$$xw = \frac{e^2}{2} - \frac{w^2}{2},$$

$yw = x$ in decrescentibus, nam in ascendentibus seu in crescentibus $yw = eb - x$. Variandae, fügt Leibniz hinzu, *hae regulae nonnihil, prout series crescunt aut decrescunt; item omitti poterit mentio minimae ordinatae, intelligendo eam semper esse ultimam; w contra ubique inseri etiam potest, ubi ipsarum w mentio est. Omnes series hactenus inventae per unam ex his regulis habentur, exceptis seriebus potestatum, quae habentur per differentias exhaustas.* In derselben Abhandlung erwähnt Leibniz folgende wahrscheinlich schon früher gefundene allgemeine Lehrsätze: $\frac{BC}{BD} = \frac{WL}{SW}$, *erit $BC \frown SW$ seu summa omnium BC, aequalis $BD \frown WL$ seu summae omnium BD ad basin; summa autem omnium BD ad basin est ipsius maximae BD semiquadratum. Porro manifestum est, summam omnium WL esse ipsam maximam BD.* Nachdem sich Leibniz noch überzeugt hatte, dass die Methode Descartes', durch eine Hülfsgleichung mit zwei gleichen Wurzeln das umgekehrte Tangentenproblem allgemein zu lösen, nicht ausreiche**), führte er in einem Manuscript vom 11 Nov. 1675 überschrieben: *Methodi tangentium inversae exempla* (Beilage II.) zuerst die Be-



*) w bezeichnet die Differenz der Abscissen.

**) In einem Manuscript vom Jan. 1675 sagt Leibniz: *Ita tandem inani spe inveniendi per duas radices aequales serierum summas et figurarum*

zeichnungsweise der Differentialrechnung ein. Nicht allein die ganze Fassung dieses Manuscripts, sondern auch die unmittelbare Uebersetzung der eben erwähnten Lehrsätze in die neue Bezeichnungsweise beweist, dass Leibniz ohne alle fremde Einflüsse durchaus selbstständig hier arbeitet. Er legt sich folgendes Problem vor: es wird eine Curve gesucht, in welcher die Theile der Axe zwischen Ordinate und Normale eines Curvenpunktes den Ordinaten selbst reciprok proportional sind. Die Lösung beginnt, indem Leibniz den zuletzt erwähnten Lehrsatz durch Einführung des Summenzeichens als Gleichung ausdrückt; zugleich giebt er dieser letztern eine andere Form, dadurch dass er den Satz anwendet, dass Summen und Differenzen sich reciprok zu einander verhalten, und so erscheint das Zeichen für die Differenz. Ueberrascht durch das gewonnene Resultat (die gesuchte Curve ist nämlich eine cubische Parabel) prüft Leibniz die Richtigkeit desselben rückwärts mittelst der Tangentenmethode de Sluze's, und überzeugt sich so, dass er keinen falschen Weg gegangen ist. Mit dieser festen Basis geht Leibniz sogleich zu schwierigeren Problemen über. Da gewinnt er schon die einfachsten Sätze aus der Integralrechnung, wie $\int y dy = \frac{y^2}{2}$; doch die schönsten Beweise des wahrhaften Talents finden sich gegen Ende des Manuscripts, wo Leibniz die besondern Vorstellungen, von denen er bei der Einführung der neuen Bezeichnungsweise ausging, aufzugeben scheint, und wie ergriffen von der Ahnung, dass er eine neue Rechnungsweise gefunden, eine allgemeine Untersuchung beginnt und sich die Frage stellt: *Videndum an dxdy idem sit quod* $\overline{dxy}$, *et an* $\frac{dx}{dy}$ *idem quod* $d\frac{x}{y}$. Er überzeugt sich, dass *dxdy* etwas anderes ist als $\overline{dxy}$, und eben so dass $\frac{dx}{dy}$ nicht mit $d\frac{x}{y}$ gleiche Bedeutung hat. Zehn Tage später, in einem

---

quadraturas sum liberatus, rationem que detexi cur sic ratiocinari non liceat, quod me diu satis vexavit.

Manuscript vom 21. November 1675 (Beilage III.) erhält Leibniz den Ausdruck für $d(xy)$, und bezeichnet ihn sogleich als ein für alle Curven gültiges allgemeines Theorem. Uebrigens scheint dieses Manuscript dasjenige zu sein, auf welches Leibniz wiederholt*) hingewiesen hat, dass ihm beim Niederschreiben desselben ein neues Licht aufgegangen wäre: es gelingt ihm nämlich, eine Differentialgleichung von den Differentialgrössen zu befreien. Hierauf deutet er auch hin, wenn er an Oldenburg schreibt (28. December 1675): *Sed et ad aliud Problema Geometricum, hactenus pene desperatum, nuper aditum reperi felicem: de quo pluribus loquar, ubi otium erit absolvendi.* — Am folgenden Tage (22. November 1675, Beilage IV.) versucht nun auch Leibniz ein neues Verfahren, die Tangente einer Curve zu finden; er schlägt den analytischen Weg ein, indem er die Tangente der Curve als construirt annimmt, und aus der Gleichung, die ihr als gerade Linie zukommt und aus der der Curve eine Unbekannte eliminirt.

Nach Verlauf eines halben Jahres endlich hat Leibniz erkannt, dass die Tangenten der Curven mittelst Differenzen allgemein bestimmt werden können. In einem Manuscript vom 26. Juni 1676 überschrieben: *Nova Methodus Tangentium* (Beilage V.) bezeichnet er das Mangelhafte in dem Verfahren Descartes', das nur anwendbar ist, wenn alle Unbekannte bis auf eine aus den Gleichungen eliminirt werden können; *at methodus tangentium generalis*, setzt er hinzu, *est per differentias, ut scilicet vera ordinatarum (directarum vel convergentium) quaeratur differentia.* Zugleich hat Leibniz auch erkannt, dass das umgekehrte Tangentenproblem sich ebenfalls mit Hülfe der Differenzen allgemein lösen lässt, und ein Manuscript vom Jul. 1676 (Beilage VI.) beweisst

*) In der Abhandlung: *De Geometria recondita et Analysi indivisitilium atque infinitorum, Leib. op. omn. ed. Dutens Tom. III.* p. 193 ferner in *Historia et origo calculi differentialis* p. 8.

dass Leibniz die von Descartes nur unvollständig oder nicht gelösten Probleme, aus der Tangente die Curve zu finden, mittelst seines neuen Algorithmus bewältigt. Es verdient bemerkt zu werden, dass in der Lösung des zweiten dieser Probleme die Bestimmung von $\int \frac{dy}{y}$ vorkommt.

Dies dürfte im Allgemeinen der Umfang sein, in welchem Leibniz das Princip und die Anwendung der höhern Analysis gegen Ende seines Aufenthaltes in Paris (die Abreise geschah im October 1676) inne hatte. Es muss zugestanden werden, dass er sich der Allgemeinheit der neuen Rechnung damals noch nicht bewusst war; ahnungsvoll schrieb er jedoch den 27. August 1676 von Paris aus an Oldenburg: *Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum, quanquam maximi momenti esse sciam.* Auf seiner Rückreise nach Deutschland verweilte Leibniz eine Woche in London, wo er die persönliche Bekanntschaft von Collins machte, der bisher in der Correspondenz zwischen Oldenburg und Leibniz der Rathgeber des erstern in Bezug auf mathematische Gegenstände gewesen war. Collins hat in einem Briefe an Newton Rechenschaft über dieses Zusammensein mit Leibniz gegeben*); er erwähnt aber mit keiner Silbe, dass er Leibniz Auskunft über die analytischen Untersuchungen Newton's ertheilt hätte. Zugleich enthält dieses Schreiben ein Bruchstück eines Briefes, den Leibniz von Amsterdam aus, wohin er seinen Weg von London genommen, an Oldenburg $^{18}/_{28}$. November 1676 schrieb. Leibniz erwähnt darin, dass die Tangentenmethode des de Sluze noch nicht das Vollkommenste wäre, was sich in dieser Hinsicht erreichen liesse, und setzt alsdann seine gewonnenen Resultate ziemlich weitläuftig auseinander, jedoch mit sorgfältiger Vermeidung jedes Algorithmus. Hieraus lässt sich fast mit Bestimmtheit folgern,

*) *Leib. op. omn. ed. Dutens. Tom. III. p. 78.*

dass während Leibnizens Aufenthalt in London zwischen Collins und ihm über die Tangentenmethode Newton's nicht verhandelt worden ist; würde sonst wohl Leibniz seine bisherigen Fortschritte auf diesem Gebiete Collins verschwiegen haben, und sie nun erst nachträglich nachholen wollen? In diesem Briefe gedenkt Leibniz auch seines Verkehrs mit Hudde, der ungeachtet seiner amtlichen Stellung als einer der Bürgermeister von Amsterdam die mathematischen Wissenschaften mit dem ausgezeichnetsten Erfolge trieb. Was hier nur andeutungsweise erwähnt ist, hat Leibniz vollständiger auf einem Blatte, das er unter seinen Manuscripten aufbewahrt hat, angemerkt (Beilage VII.). Der Inhalt desselben darf vielleicht zu dem Schluss berechtigen, dass Leibniz in Folge dieses Umgangs mit Hudde über die Allgemeinheit seiner neuen Rechnung mit sich ins Klare gekommen ist. Hudde hatte gegen ihn erwähnt, dass er sehr oft den Ausdruck für die Tangenten sogleich hinschreiben könnte, ohne vorher gebrochene und irrationale Functionen zu beseitigen; Leibniz prüfte vielleicht sein Verfahren und fand, dass es in jedem Falle dasselbe leistete, denn in dem Manuscript: *Calculus Tangentium differentialis, Novembr.* 1676 (Beilage VIII.), das also entweder in Amsterdam oder auf der Reise geschrieben ist, entwickelt Leibniz fast vollständig die Grundzüge der Differentialrechnung.

Leibniz gelangte gegen Ende des December 1676 in Hannover an. Es darf nicht befremden, dass er auf längere Zeit, wie es scheint, die Differentialrechnung ganz aus den Augen verlor; ein veränderter Wohnsitz, ein neues Amt nahmen anderweitig seine Aufmerksamkeit in Anspruch. Erst um die Mitte des Jahres 1677 kommt Leibniz in einem Antwortschreiben an Newton auf die Differentialrechnung zurück, insofern sich nämlich durch sie allgemein Tangenten und krumme Linien ziehen lassen. Zugleich findet sich ein Manuscript vom 11. Jul. 1677 mit dem Titel: *Methode generale pour mener les touchantes des Lignes Courbes sans calcul, et*

sans reduction des quantités irrationelles et rompues (Beilage IX.) das zur Veröffentlichung ausgearbeitet zu sein scheint, da sich mehrere Bearbeitungen davon finden; in demselben ist die Differentialrechnung in demselben Umfange dargestellt, wie Leibniz sie später im Jahre 1684 bekannt gemacht hat.

Man könnte nun fragen, wodurch Leibniz bewogen wurde, die Differentialrechnung so lange zurückzuhalten. Ausserdem, dass er hierin der Gewohnheit der Zeit folgte, nach welcher die Mathematiker ihre neuen Methoden geheim hielten, um den möglichsten Vortheil davon zu ziehen, lässt sich noch anführen, dass bis zum Jahre 1684 seine Aufmerksamkeit vorzugsweise auf die Ausbildung der umgekehrten Tangentenmethode, d. h. auf die Integralrechnung gerichtet war. Leibniz wollte hier ebenso allgemeine Regeln aufstellen, wie in der Differentialrechnung. Da ihm dies nicht gelang, so erwähnte er auch bei der ersten Bekanntmachung der Differentialrechnung nichts davon.

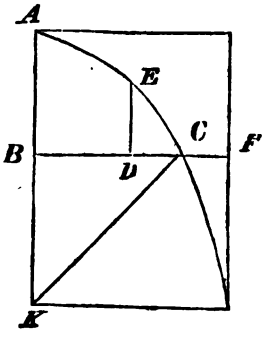
Beilage I.

Die vorliegende Schrift war bereits vollendet, als ich in der ungedruckten Correspondenz zwischen Leibniz und Jacob Bernoulli die folgende, höchst interessante Notiz fand, die als ein frischer, rücksichtsloser Erguss gegen einen befreundeten Mathematiker gewiss völliges Vertrauen verdient. Leibniz hatte sie als *postscriptum* eines Briefes, datirt *Berolini April* 1703, entworfen, darauf aber wieder durchstrichen und ein anderes von ganz verschiedenem Inhalte dafür gesetzt.

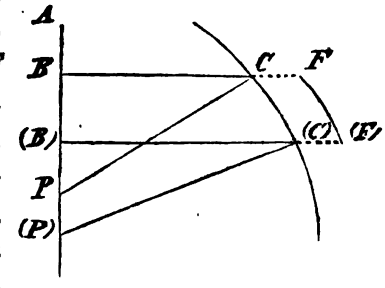
P. S.

An eam in me animi parvitatem putas, ut vel Tibi, vel Dno. fratri tuo, vel cuiquam alteri succenseam, si vos in Barrovio usus perspexistis, quos mihi inventionum contemporaneo ab eo petere necesse non fuit. Cum Parisios appulissem anno Christi 1672, eram ego Geometra autodidactos, sed parum subactus, cui non erat patientia percurrendi longas series demonstrationum. Algebram Lanzii cujusdam puerilem, deinde Clavii puer consulueram; Cartesii implicatior visa erat. Videbar tamen ipse mihi nescio qua satis credo temeraria ingenii fiducia par et his faturus si vellem. Audebamque inspicere libros profundiores, ut Cavalerii Geometriam et Leotaudi amoeniora curvilineorum elementa, quae forte Noribergae inveneram, et similia quaedam plane sine cortice nataturus. Nam pene legebam ut Historias Romanenses. Interim quendam Calculum mihi Geometricum fingebam, per quadratilla et cubilos incertis numeris expri-

mendos; ignarus haec omnia Vietam et Cartesium melius elaborasse. In hac pene dixerim superba Matheseos ignorantia ego historias et jura circumspiciebam, quod illis studiis me destinassem. Ex Mathesi jucundiora libabam, Machinas inprimis cognoscere atque invenire amans; nam et Arithmetica mea Machina illius temporis partus fuit. Cum forte Hugenius, qui plus credo in me quaerebat quam erat, exemplum mihi sui de Pendulis libri recens editum pro humanitate sua attulit. Id mihi accuratioris Geometriae initium vel occasio fuit. Dum sermones caedimus, animadvertit me non satis rectam habere notionem centri gravitatis, eam ergo indicavit paucis; simul addidit Dettonvillaeum (hoc est Pascalium) talia egregie executum. Ego qui semper hoc habui eximium, ut essem mortalium docillimus, saepeque luce ex unius magni viri verbis pauculis hausta innumera mea meditata nondum matura delevi, statim arripere monita summi Mathematici, nam quantus esset Hugenius facile perspiciebam. Accedebat pudoris stimulus, quod visus essem rem talem ignorare. Itaque Dettonvillaeum peto a Buotio, Gregorium Vincentiadem ex Bibliotheca Regis, jam serio Geometram acturus. Nec mora illos ductus Vincentii, illas ungulas a Vincentio coeptas, a Pascalio promotas; tum illas summas et summarum summas nataque diverse solida et resoluta, cum jucunditate spectabam; plus enim voluptatis quam laboris afferebant. In his eram, cum forte incido in demonstrationem Dettonvillaei specie levissimam, qua probat dimensionem Archimedeam superficiei sphaerae et ex triangulorum *EDC* et *CBK* similitudine ostendit, fore *CK* in *DE* = *BC* in *EC*, adeoque ponendo *BF* = *CK*, fore rectangulum *AF* aequale momento curvae *AEC* ex axe *AB*. Haec ratiocinandi novitas me percussit; neque enim animadverteram apud Cavalerianos. Sed nihil magis obstupui, quam quod Pascalius fato quodam velatos oculos habuisse videretur; statim enim



videbam generalissimum esse theorema pro quacunque curva, esti perpendiculares in uno centro non concurrerent, si modo perpendicularis a curva ad axem in ordinatam transferretur, ut *PC* vel *(P)(C)* in *BF* vel *(B)(F)*, manifestum erat Zonam *FB(B)(F)F* aequari momento curvae *C(C)* ex axe. Ego statim eo ad Hugenium, quem nondum revideram: dico me obsecutum ejus monitis, jam posse aliquid, quod neque Pascalius habuisset. Et theorema generale pro momentis curvarum expono. Ille admiratus, atqui, inquit, hoc ipsum theorema est, cui innituntur meae constructiones pro superficiebus Conoidum Paraboli-



corum, Ellipticorum et Hyperbolicorum explanandis, quae quomodo inventa essent, Robervallius et Bullialdus nunquam sapere potuerunt. Itaque applaudens ipse progressibus meis, quaesivit, possemne jam curvarum quales *FF* naturas invenire. Cum negarem me in ea inquisitione exercitatum, ipse Cartesium et Slusium inspicere jussit, qui aequationes locales conficere docuissent; id enim ajebat esse percommodum. Ex eo Geometriam Cartesii examinavi Slusiumque adjunxi, ingressus profecto in Geometriam per posticum. Cum vero successus blandiretur, et innumera sub manibus nascerentur, aliquot centena folia eodem anno implevi, quae in duo genera distinguebam, Assignabilium et Inassignabilium; ad assignabilia referebam, quaecunque consequebar iis viis anterioribus, quibus Cavallerius, Guldinus, Torricellius, Gregorius a S. Vincentio, Pascalius, erant usi, summis, summis summarum, transpositionibus, ductibus, cylindrisque per plana truncatis, per viam denique centri gravitatis. Inassignabilibus ascribebam, quae adhibito triangulo illo quod jam tum vocabam characteristicum, similibusque aliis consequebar, et quorum initia Hugenius et Wallisius dedisse mihi videbantur. Paulo post incidit in manus meas Geometria Universalis Jac. Gregorii Scoti, huic videbam eandem artem esse perspectam (quamvis demon-

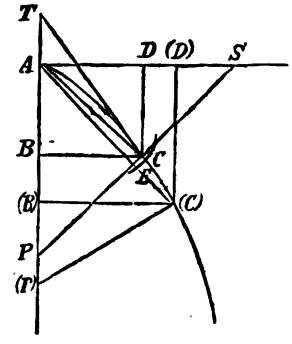
strationibus ad morem Veterum obscuratam) quemadmodum et Barrovio demum cum ejus Lectiones prodirent, ubi magnam partem meorum theorematum praereptam vidi. Parum tamen movebar, cum obvia esse viderem semel his imbuto tironi, animadverteremque superesse multo altiora, sed quae novo calculi genere indigerent. Unde Arithmeticam meam Quadraturam similiaque, licet magno plausu Galli Anglique excepissent, nec editione digna putabam, pertaesus haerere in minutis, dum se Oceanus quidem aperiret. Cactera ut processerint nosti et comprobant literae meae ab Anglis ipsis editae.

Beilage II.

11. Novembr. 1673 *).

Methodi tangentium inversae exempla.

Jam superiore anno mihi proposueram quaestionem, quae inter difficillimas totius Geometriae haberi potest, vel ideo quod nihil conferunt methodi hactenus vulgatae. Ejus hodie solutionem reperi, cujus analysin dabo: Nimirum *quaeritur curva C(C) in qua ipsae BP intervalla ordinatarum BC, et perpendicularium ad curvam PC, in axe AB(B) sumta, sint ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia.* Sit alia recta *AD(D)* ad ipsam *AB(B)* axem normalis, in quam ducantur ordinatae *CD*, ita ut ipsae *AD* abscissae ex axe *AD(D)* sint ipsis *BC* ordi-



*) Muss 1675 heissen. Ein unberufener Falsarius hat mit dieser Jahreszahl eine Fälschung versucht. Die Spuren davon sind deutlich zu sehen; der

natae ad axem $AD(D)$ aequales, ipsis AB abscissis ex axe $AB(B)$. Appellemus $AD = BC = y$, et $AB = DC = x$; ipsam BP vocemus w et ipsam $B(B)$ vocemus z. Constat ex alibi a me demonstratis: esse $\int wz = \frac{y^2}{2}$, sive esse $wz = \frac{y^2}{2d}$*). At ex quadratura Trianguli patet esse $\frac{y^2}{2d} = y$. Ergo $wz = y$. Jam ex hypothesi est $w = \frac{b}{y}$, ita enim erunt ipsae w ipsis y reciproce proportionales. Ergo fiet: $\frac{bz}{y} = y$, adeoque $z = \frac{y^2}{b}$. Jam $\int z = x$. Ergo $x = \int \frac{y^2}{b}$. At $\int \frac{y^2}{b} = \frac{y^3}{3ba}$ ex quadratura Parabolae; ergo $x = \frac{y^3}{3ba}$, quae est aequatio explicans relationem inter ordinatas y et abscissas x curvae quaesitae $C(C)$. Inventam ergo habemus curvam quae est Analytica, et uno verbo Parabola Cubica, cujus vertex A.

Videbimus ergo, an verum sit hoc Theorema sane memorabile: „In Parabola Cubica $C(C)$ sunt BP intervalla per„pendicularium ad curvam PC et ordinatarum BC ad axem, in „axe ABP sumta ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia." Hoc calculus tangentium facile ostendet. Aequatio Parabolae Cubicae: $xc^2 = y^3$; ponendo c latere recto, sive pro c^2 ponendo $3ba$, sive $c = \sqrt{3ba}$, fiet: $3xba = y^3$. Ergo ex methodo tangentium Slusii erit $t = \frac{y^3}{ba}$, ponendo $BT = t$, intervallo inter tangentem et ordinatam in axe. Jam $BP = w$ est $= \frac{y^2}{t}$. Ergo $w = \frac{y^2}{\frac{y^3}{ba}} = \frac{ba}{y}$. Sunt ergo ipsae w ipsis y reciproce proportionales, quod desiderabatur.

---

obere Zug der 5 ist wegradirt und dafür mit schwärzerer Dinte der obere Zug von 3 gesetzt.

*) Leibniz hat am Rande bemerkt: *∫ summa, d differentia.*

Analyseos hujus artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam fecimus; cujus stratagematis antea non venerat in mentem. Non est difficilior quaestio, si quaeratur curva, in qua ipsae BP intervalla ordinatarum et perpendicularium sint ipsis AB abscissis reciproce proportionales. Nempe $w = \frac{a^2}{x}$; jam $\int w = \frac{y^2}{2}$, ergo $y = \sqrt{2\int w}$ vel $\sqrt{2\int\frac{a^2}{x}}$. Jam $\int w$ non potest inveniri nisi ope curvae logarithmicae. Ergo et figura, quae satisfaciat est in qua ordinatae sunt in subduplicata ratione logarithmorum ab abscissis; quae figura est ex numero Transcendentium.

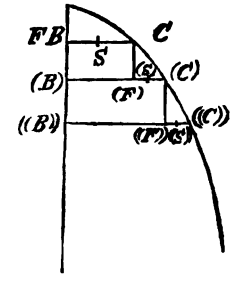
At revera diffilior est quaestio, cum quaeritur ut ipsae AP sint ipsis BC ordinatis reciproce proportionales. Nempe $x + w = \frac{a^2}{y}$ et $wz = \frac{y^2}{2d}$, et $\int z = x$ sive $z = \frac{x}{d}$ sive fiet: $w\frac{x}{d} = \frac{y^2}{2d}$ et $w = \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d}$ et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d} = \frac{a^2}{y}$. Ponendo ipsas x arithmeticas, erit $\frac{x}{d} = z$ constans et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} = \frac{a^2}{y}$ et $\int x = \int\frac{a^2}{y} - \frac{y^2}{2}$, et $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \int\frac{a^2}{y}$ sive $d\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2a^2}{y}$. Jam junctae AC, $A(C)$ sunt $= \sqrt{x^2 + y^2}$. Centro A, radio AC, describatur arcus CE, ita ut E cadat in rectam $AE(C)$, erunt ipsae $E(C)$ differentiae inter AC et $A(C)$, sive $EC = e = d\sqrt{x^2 + y^2}$. Ergo $e = \frac{2a^2}{y}$. Si ergo liceret y sumere Arithmeticae progressionis haberemus quaesitum; videtur tamen nihil referre etsi x progressionis arithmeticae sumserimus. Sumtis enim x progressionis Arithmeticae, sequitur ipsis AD sive y, esse ipsas EC sive e reciproce proportionales. Quod si autem sunt semel, erunt semper. Summae autem infinitarum reciproce proportionalium habentur, quacunque sint progressione, ex quibus reciproce proportionales sumuntur, neque enim hic rectangulorum ulla ratio habetur, ubi aequali altitudine opus est,

sed summa linearum, omnium scilicet $E(C)$, initur. Sed jam video difficultatem ipsam omnium e summam sive omnes $\frac{2a^2}{y}$, sive ipsas $A(C)$ non haberi, nisi sciatur cujus progressionis sint ipsae y. Quod hoc loco ignoratur, quoniam ipsas x necesse est esse progressionis Arithmeticae, non ipsas y. Sin jam in aequatione superiore $x + \frac{y^2}{2d} \sim \frac{x}{d} = \frac{a^2}{y}$ faciamus y progressionis Arithmeticae, fiet: $x + \frac{y}{dx} = \frac{a^2}{y}$*) et $xy + \frac{y^2}{dx} = a^2$; imo generaliter neutri assignando progressionem, fiet: $xy + y\frac{\overline{dy^2}}{dx} = a^2 (\odot)$. Sed nondum quicquam praestitimus; considerandum ergo ex doctrina indivisibilium, producta PCS dum ipsi AD occurrat in S, esse summam omnium AP applicatarum ad AB, aequalem summae omnium AS applicatarum ad AD, id est vocando $DS = v$, fiet $dy\int y + dy\int v = dx\int x + dx\int w$, sive $dy\int y + dy\int v = dx\int \frac{a^2}{y}$ ex hypothesi quaestionis. Ponendo jam y progressionis Arithmeticae fiet: $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = dx\overline{Log\, y}$. At paulo ante eadem facta suppositione ipsarum y progressionis Arithmeticae fuit $xy + \frac{y^2}{dx} = a^2$ fiet: $dx = \frac{y^2}{a^2 - yx}$ et nunc: $dx = \frac{y^2 + x^2}{2\,\overline{Log\, y}}$; ergo habemus denique aequationem in qua solae supersunt x et y extra vincula, nempe: $\overline{y^2 + x^2}$, $a^2 - yx = 2y^2\overline{Log\, y}$, quae aequatio, cum sit determinata, locum dabit quaesitum. Et valde memorabilis est haec methodus, cum enim non sit hic in nostra potestate tot aequationes habere quot incognitas, poterimus tamen saepe plusculas obtinere aequationes, et earum ope quosdam terminos elidere, ut hoc loco $\overline{dx}$, quae sola nobis obstabat. Singulae aequationes totam includebant aequationis naturam,

*) Idem est dx et $\frac{x}{d}$, id est differentia inter duas x proximas. Bemerkung Leibnizens.

tamen ex iis erui poterat solutio, quod media facilia hactenus desint, conjunctio duarum aequationum rem compendio dedit. Videor idem aliter obtinere potuisse per momenta. Ubi in mentem venit consideratio nova non inelegans. In Fig. 2 est $BC = y$, $FC = \overline{dy}$. Sit punctum S medium ipsius FC, patet momentum ipsius FC esse rectangulum sub FC et BS, id est rectangulum BFC; nam cum sit $BFC + SFC$, posterius quippe prioris ratione infinite parvum negligi potest, adeoque erit $\int y\overline{dy} = \frac{y^2}{2}$ sive momentum omnium differentiarum FC aequabitur ultimi termini momento, et $ydy = d\frac{y^2}{2}$ et $y^2dy = \frac{y\,dy^2}{2}$. Porro supra in aeq. (⊙) faciendo x arithmeticam fuit $yd\frac{y^2}{2} = a^2 - xy$ sive $d\frac{y^2}{2} = \frac{a^2 - xy}{y}$, at idem $= y\overline{dy}$; fiet ergo $y\overline{dy} = \frac{a^2 - xy}{y}$, et erit $\int y\overline{dy} = \int \frac{a^2}{y} - \frac{x^2}{2}$. At jam invenimus esse $\int y\overline{dy} = \frac{y^2}{2}$, fiet ergo $y^2 + x^2 = 2\int \frac{a^2}{y}$ ut ante, vel $d\overline{y^2 + x^2} = \frac{2a^2}{y}$. Ubi patet res notabilis, in his aequationibus in quibus reperiuntur $\int$ et d ubi jam una, v. g. hic x pro arithmetice procedente sumta est, non posse jam inverti, nec dici nos habere valorem ipsius x, nempe $x = \frac{2a^2}{y} - \overline{dy^2}$, quia $\overline{dy^2}$ non potest intelligi nisi determinata progressionis natura ipsius y; ipsius y autem progressio, ut $\overline{dy^2}$ serviat, talis sumi debet ut sint x progressionis Arithmeticae, ergo ipsae $\overline{dy}$ supponunt ipsas x, non ergo per ipsas invenietur x. Caeterum hac arte multa poterunt praeclara haberi theoremata de curvis alias intractabilibus, jungendo scilicet plures ejusmodi aequationes.

Fig. 2.



Ut in hujus modi quaestionibus sane difficillimis simus exercitatiores, utile erit adhuc unam experiri, ut scilicet ipsae AP sint ipsis AB reciproce proportionales; fiet: $x + w = \frac{a^2}{x}$, et $zw = d\overline{y^2}$, et $z = d\overline{x}$, adeoque fiet: $w = \frac{d\frac{\overline{y^2}}{2}}{z} = \frac{d\frac{\overline{y^2}}{2}}{dx}$, et denique $x + \frac{\frac{\overline{dy^2}}{2}}{dx} = \frac{a^2}{x}$. Cujus jam non difficilis solutio est, nam ponendo x arithmeticas, fiet: $\int x + \frac{y^2}{2} = \int \frac{a^2}{x}$, sive fiet: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \overline{Log\, y}$, sive $\sqrt{x^2 + y^2} = AC = \sqrt{2\, Log\, AD}$, quae expressio curvae satis est simplex. Requiruntur autem ipsae AP progressionis arithmeticae. Contra si sint y progressionis arithmeticae, fieret: $x + \frac{y}{dx} = \frac{a^2}{x}$; sed hinc non facile habebitur natura curvae.

Videamus an possit esse curva, in qua ipsae AC ipsis BP aequales; fiet: $\sqrt{x^2 + y^2} = w$ et $w = \frac{dy^2}{2dx}$. Sit x progressionis arithmeticae, fiet: $\left(\int\sqrt{x^2 + y^2} =\right) \int AC = y^2$, sed non hoc sufficit ad curvam mechanice describendam, per puncta scilicet proxime accedentia. Ut sit $x = 1$, sit $BC = (y)$, erit $\sqrt{1 + (y^2)} \mid = (y^2)$ sive $1 + (y^2) = (y^4)$. Unde habetur (y), nemque $y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, sive $(y^2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $(y) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. Porro eodem modo $\sqrt{\underset{AC}{4 + ((y^2))}} + \sqrt{\underset{A(C)}{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}} = ((y^2))$, ita rursus poterit inveniri $((y))$. Et hujus ope reperietur tertia AC, et ita reperietur polygonum aliquod curvilineo quaesito eo similius, quo minor assumta est unitas.

x esse progressionis Arithmeticae significat motum (inter describendum) in axe AB esse uniformem. Descriptiones autem, quae

supponunt motum aliquem esse uniformem, non sunt prorsus in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem, nisi continue interruptum.

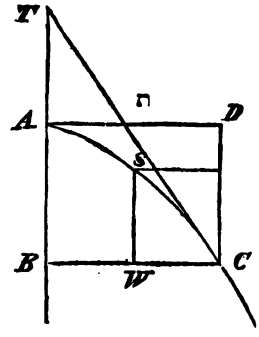
Videndum an $dx\,dy$ idem sit quod $\overline{dxy}$, et an $\frac{dx}{dy}$ idem quod $d\frac{x}{y}$, et videtur, ut sit $y = z^2 + bz$ et x sit $cz + d$, fiet $dy = z^2 + 2\beta z + \beta^2, + bz + b\beta, - z^2 - bz$, et fiet $dy = \overline{2z + b}\beta$. Eodem modo $dx = + b\beta$, et ita erit $dz\,dx = \overline{2z + b}\,c\beta^2$. At idem produces, si statim facias dxy. Nam in singulis factoribus separatim destructio fit, altero in alterum non influente; idem est de divisoribus. Sed jam cum earum summae quaeruntur, discrimen an sit, videndum est. $\int dx = x, \int dy = y, \int \overline{dxy} = xy$ *). Si jam sit aequatio v. g. $dx\,dy = x$, erit $\int \overline{dx\,dy} = \int x$. Jam $\int x = \frac{x^2}{2}$, ergo $\int \overline{dx\,dy} = \frac{x^2}{2}$, sive $xy = \frac{x^2}{2}$, sive $\frac{x}{2} = y$, quod satisfacit aequationi $dx\,dy = x$; nam pro y ponendo ejus valorem fiet: $dx\frac{dx}{2} = x$ sive $\frac{dx^2}{2} = x$, quod verum esse constat. In summis haec non procedunt, nam $\int x \int y$ non est idem quod $\int \overline{xy}$; ratio est, quod differentia est quantitas unica, at summa est quantitatum plurium aggregatum. Summa differentiarum est terminus novissimus. At ex summis facientium invenire summas productorum, nondum analytice, certa ratione possumus, et quae in eo genere fecit Wallisius, non demonstratione, sed felici inductione, nituntur. Demonstrationem tamen eorum invenire, magni res foret momenti. Sint $\int \overline{zy}$, quae quaeruntur.

---

*) Error, vide infra (Bemerkung von Leibniz).

Ponatur $\int\overline{xy} = w$, erit $xy = \overline{dw}$, et $y = \frac{\overline{dw}}{x}$, et $\int y = \int\frac{\overline{dw}}{x}$. Eodem modo $\int z = \int\frac{\overline{dw}}{y}$. Ponatur $\int y$ nota $= v$, et $\int z$ nota $= \psi$, fiet $y = dv = \frac{\overline{dw}}{x}$ et $z = d\psi = \frac{dw}{y}$ et $\frac{dv}{d\psi} = \frac{x}{y}$. Unde sequi videtur $d\frac{v}{\psi} = \frac{x}{y}$, adeoque $\frac{v}{\psi} = \int\frac{x}{y}$. Ergo foret $\int\frac{x}{y} = \frac{\int x}{\int y}$, quod est absurdum. Unde sequitur $\int\frac{dv}{d\psi}$ non esse $\frac{v}{\psi}$. Quid ergo erit? Differentia ipsarum v, divisa per differentiam ipsarum ψ summenda est. Non ergo quaelibet differentiarum, adeoque et tota v, dividenda erit per singulas ipsius ψ; non, inquam, quia singulae tantum per singulas respondentes sibi dividuntur, non quaelibet per omnes. Ergo aliud est $\int\frac{dv}{d\psi}$ quam $\frac{\int dv = v}{\int d\psi = \psi}$. Ergone aliud erit $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$? Si idem est, etiam $\int d\frac{v}{\psi}$ erit $= \int\frac{dv}{d\psi}$, sive $\frac{v}{\psi} = \int\frac{dv}{d\psi} = \frac{\int dv}{\int d\psi}$, quod absurdum est. Eodem modo, an $\overline{dv\psi} = dv\,d\psi$. Ergo $\int\overline{dv\psi}$ sive $v\psi = \int\overline{dv\,d\psi}$. Jam $v\psi = \int dv \int d\psi$; ergo $\int\overline{dv\,d\psi} = \int dv \int d\psi$ quod est absurdum. Ergo absurdum esse videtur $dv\,d\psi$ idem esse quod $dv\psi$, itemque $\frac{dv}{d\psi} = d\frac{v}{\psi}$, quod tamen paulo ante asserueram, et quod videtur demonstrativum. Difficilis nodus. Sed jam distinguendum video: Si sit v et ψ et faciant $v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$ quantitatem aliquam v. g. $\aleph = v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$, sintque valores tam ipsius v quam ipsius ψ rationales per unam quandam, v. g. abscissam x expressi, tunc calculus semper docebit eandem produci differentiam, sive idem fore $d\aleph$ et $dv\,d\psi$ vel $\frac{dv}{d\psi}$. Sed jam video ista nunquam procedere, nec per partes in his iri posse, nam v. g. sit $x + \beta, \frown x + \beta,, - x, x,$ fiet $2\beta x$, quod longe aliud est quam $x + \beta, - x,, \frown x + \beta, - x$

quod daret β^2. Concludendum ergo aliud esse $\overline{dv\psi}$ quam $dv\,d\psi$, aliudque $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$. Sit primus gradus $a + bx + cy = 0$; $D\sqcap = \Theta$, $AB = x$, $BC = y$, $TB = t$; ordinando et accommodando ad tangentes, fiet: $bt = -cy$, et $t = \frac{-cy}{b}$. Eodem modo $\Theta = \frac{-bx}{c}$. Sit $WC = w$ et $WS = \beta$, patet esse: $\frac{t}{y} = \frac{\beta}{w}$, et fiet: $w = \frac{-\beta b}{c}$. Eodem modo $\beta = \frac{-wc}{b}$. Secundus gradus:



$a + bx + cy + dx^2 + cy^2 + fyx = 0$; ordinando ad tangentes fiet: $bt + 2dxt + fyt = -cy - 2cy^2 - fyx$, adeoque $t = \frac{-cy - 2cy^2 - fyx}{b + 2dx + fy}$. Unde facile patet, semper t per y (et Θ per x) dividi posse et quoniam $w = \frac{\beta y}{t}$, ideo fiet hic $w = \frac{\beta\overline{b + 2dx + fy}}{-c - 2ey - fx}$, adeoque fiet: $y = \frac{-wc + fx, \frown \beta\overline{b + 2dx}}{f + 2e}$, at paulo ante $y = \frac{-a - bx - dx^2}{c + ey + fx}$ et fiet:

$$y = \frac{-w, \overline{c + fx}, \frown -\beta\overline{b + 2dx}, \frown \overline{c + fx},,, + \overline{f + 2e} \frown \overline{a + bx + dx^2}}{-wc + fx, \frown -\beta\overline{b + 2dx}, \frown -e}$$

$$= \frac{-wc + fx, \frown -\beta\overline{b + 2dx}}{f + 2e}$$

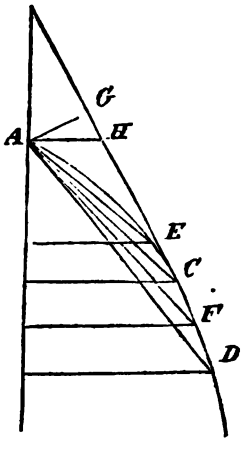
Habemus ergo aequationem, in qua nulla est amplius y. Et omnes figurae, quarum aequatio ex hac aequatione pro varia explicatione literarum constantium formari potest, quadrari possunt; illae item, quae ipsi per methodos alias ostendi possunt *σύγνωτοι*.

Beilage III.

21. Nov. 1675.

Pro methodo tangentium inversa et aliis tetragonisticis specimina et inventa. Trigonometria indivisibilium. Aequationes inadaequatae. Ordinatae convergentes. Usus singularis Centri gravitatis.

Materia contemplationis novae de Centris gravitatis hoc modo:

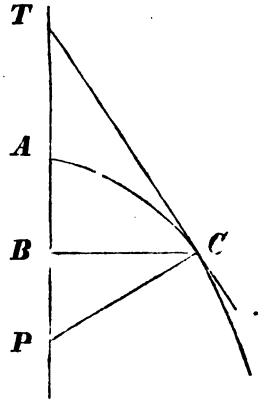


Segmento *AECD* in triangula infinita *AEC, ACF* etc. resoluto, inveniatur cujuslibet ex his triangulis centrum gravitatis, quod facile est cum semper centrum gravitatis $^1/_3$ altitudinis parte distet a basi. Cumque via centri gravitatis in triangulum ducta aequetur revolutioni ejus, ipsae autem *AH* in infinitesimas axis aequentur duplo triangulo, patet et ipsas *AG* in ipsas centrorum gravitatis ipsorum triangulorum *AEC* distantias ab axe ductas momento segmenti ex axe aequari. Cujus methodi ope multa statim inveniri possunt dupliciter: primum, sumendo figuram generalem, et calculando indeterminate, eamque deinde ita exprimendo, ut centrorum gravitatis facilis habeatur inventio, ita detegentur momenta spatiorum aliter difficilium, si communi more per ordinatas quaererentur: deinde contra, si figurae, quarum communi more facile habentur momenta, hac methodo tractentur, venietur ad curvas quasdam valde implicatas quarum semper dimensio habebitur ex facilioribus. Ecce hic *Regulam notabilem cujus ope ex qualibet Methodo utcunque implicata semper utilia eruuntur.* Utile est saepe quando alte assurgunt problemata, quae sua natura simplicia esse et aliunde solubilia scimus,

ita enim multos detegent casus notabiles. Vide quae Tschirnhausius annotavit de tangentibus lineae Hastariae.

In problematis irregularibus, quae recta tractari aut ad aequationem satis determinatam revocare non possumus, quia scilicet faciendum aliquid inverse, utile est plures vias inter se conferre, quarum producta coincidere debent. Hoc videntur utile ad methodum tangentium inversam. Ecce specimen.

Quaeritur figura in qua BP ipsis AT reciprocae. Sit $TB = t$, erit $AT = t - x$ et erit $BP = \frac{a^2}{t-x}$. Multiplicetur in t, fiet $\square\, TBP = \frac{ta^2}{t-x} = a^2 + \frac{a^2 x}{t-x} = y^2$, fiet $ta^2 = ty^2 - xy^2$ et $t = \frac{xy^2}{a^2-y^2}$, ergo $\frac{t}{x} = \frac{y^2}{a^2-y^2}$, ergo $\overline{\text{omn. } t}$ = momento ex vertice A ipsorum $\frac{y^2}{a^2-y^2}$. Aliunde omnes TP ad axem aequantur omnibus TC ad curvam.



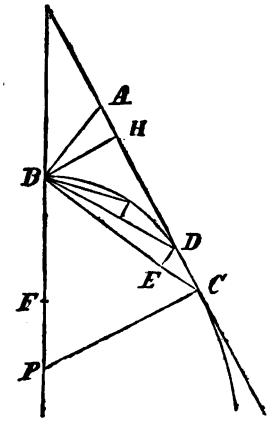
$\frac{t}{y} = \frac{\beta}{\omega}$, erit $\omega = \frac{\beta y}{t = \frac{y^2 x}{a^2-y^2}} = \frac{\beta \overline{a^2-y^2}}{xy}$. Jam $\int \omega = y$, ergo $\int \frac{\beta \overline{a^2-y^2}}{xy} = y$ (◯); porro $\omega x = \frac{\beta \overline{a^2-y^2}}{y}$ et $\int \overline{\omega x} = yx - \int \overline{y\beta}$, ergo $\int \frac{\beta \overline{a^2-y^2}}{y} = yx - \int \overline{y\beta}$ (⊙). $\omega = dy$, ergo $dy = \frac{\beta \overline{a^2-y^2}}{xy}$ et $xy = \frac{\beta \overline{a^2-y^2}}{dy = \omega} = \int \overline{y\beta} + \int \frac{\beta \overline{a^2-y^2}}{y}$. Si jam ponamus ipsas y progressionis arithmeticae, erunt ipsae $\omega = \overline{dy}$ constantes et β variabiles, et fiet: $\beta = \frac{\int \overline{y\beta + \beta \frac{a^2-y^2}{y}}}{a^2-y^2}$ et $\overline{\overline{d\beta\, \overline{a^2-y^2}}} = \frac{a^2 \beta}{y}$. Ob aequationem (⊙) est $\beta \frac{a^2-y^2}{y} + \beta y = \overline{dyx}$, ergo $\frac{\beta a^2}{y} = \overline{dyx}$.

Aequationes habuimus invicem independentes, primam $\frac{dx}{dy} = \frac{yx}{a+y,\, a-y}$ (1) alteram $dy\overline{x} = \frac{d\overline{x}\, a^2}{y}$ (2). Quaeramus adhuc alias, ut $\int t\overline{dy} = \int y\overline{dx}$. Sed hoc nihil praebet novi; at $\int t\overline{\omega} + \int x\overline{\omega} = xy$ sive $t dy + x dy = d\overline{xy}$; at $t = \frac{dx}{dy} y$, ergo hoc $= \frac{d\overline{xy} - x\overline{dy}}{dy}$. Ergo $d\overline{xy} = d\overline{xy} - x\overline{dy}$. Quod Theorema sane memorabile omnibus curvis commune est. Sed nihil ex eo novi ducetur, quia jam adhibuimus. Sed ex alio principio novum habebimus theorema, quia scilicet habetur summa omnium $BP = \frac{BC^2}{2}$, scilicet: $BP = \frac{a^2}{t-x}$ et $t = \frac{\beta y}{\omega} = \frac{d\overline{x}}{d\overline{y}}\, y$ et $BP = \frac{a^2\, dy}{d\overline{x}\, y - d\overline{y}\, x} = \frac{dy^2}{2}$ (3). Habemus ergo duas aequationes, in quibus reperitur $d\overline{x}$, scilicet primam et tertiam, quarum ope tollendo $d\overline{x}$ habebimus aequationem, in qua una tantum incognitarum in vinculo remanebit. Quo facto habebimus quaesitum; nimirum ex aeq. 1. erat $d\overline{x} = \frac{d\overline{y}\, yx}{a^2 - y^2}$ et uunc ex 3. erit $d\overline{x}\, y\, d\overline{y^2} - dy\, d\overline{y^2}\, x = 2a^2\, dy$. Ergo $dx = \frac{2a^2\, d\overline{x} + dy\, d\overline{y^2}\, x}{y\, dy^2}$. Habemus ergo aequationem inter duos ipsius dx valores, in qua non nisi y in vinculo. Quo facto, sumendo y arithmetice proportionales fiet $dy = \beta$ constans, et $d\overline{y^2} = z$, at $\int z = \frac{z^2}{2} = y^2$, ergo $z = \sqrt{2}y = d\overline{y^2}$. Habemus ergo quaesitum.

Ecce elegantissimum specimen, quo problemata Methodi Tangentium inversae solvuntur aut saltem reducuntur ad Quadraturas: Nimirum efficiendum est si licet diversis aequationibus conquisitis, ut una tantum incognitarum in vinculo Tetragonistico relinquatur. Hoc effici poterit ordinatas varie sumendo, imo et loco ordinatarum convergentes vel alias. Nota: Si loco x vel y alia quaedam recta inveniri posset, aut quae esset obliqua, aut quae esset una ex convergentibus ad idem punctum, qua adhibita una tantum incognitarum

in vinculis restaret, tuto adhiberetur. Exemplum sumi posset in quaerenda ipsarum *AP* relatione, summa enim ipsarum *AP* ad axem aequatur semiquadrato ipsius *AC*. Quandocunque in vinculo relictae unius incognitae formulae sunt tales, ut incognita non contineatur in irrationalitate aut nominatore, semper absolute solvi potest problema, reducitur enim ad quadraturam, quae est in potestate; idem est in nominatoribus et irrationalibus simplicibus. At in compositis casus evenire potest, ut ad quadraturam redeamus, quae non est in potestate. Sed quidquid sit, quandocunque problema ad quadraturam reduximus, semper describi potest curva quaesita motu Geometrico, qui exacte in potestate est, nec materialem curvam supponit. Haec porro methodus analytice exhibebit quadraturarum a se invicem dependentias, et viam sternet ad absolvendam tetragonisticen. Fateor interim fieri posse, ut ingenti numero *aequationum inadaequatarum* (quales istas voco, quarum pluribus opus est ad solvendum problema, etsi ipsae solae sufficerent, si tractabiles essent) opus sit ad unam penitus ex vinculis tollendam. Malum enim in eo est, quod una aequatione non nisi unus terminus ex vinculis tolli potest, et is si saepius inest, non nisi semel. Itaque intererit magnum quaeri numerum aequationum inadaequatarum. Et examinandum, quae sint ab aliis quodam modo independentes, id est per simplicem calculum non possint a se invicem derivari, v. g. summa omnium *AP*, et summa omnium *AE*.

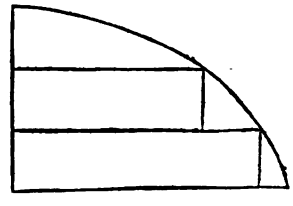
Fig. 1.



Novum genus *Trigonometriae indivisibilium ope ordinatarum non parallelarum, sed convergentium*. Sit punctum fixum *B*. Sit ad curvam Triangulum exiguum *BDC*. Sit *DE* perpend. in *BC*. Ex puncto *B* ducantur tangenti *AHDC* occurrentes *BA* nor-

malis ad *BC* seu parallela *DE*, et *BH* normalis ad tangentem *DC* productam. Hinc similia triangula: *CED*, *CHB*, *BHA*. Ergo $\frac{BH}{CE} = \frac{HA}{DE} = \frac{BA}{CD}$ adeoque *BH*, *DE* = *CE*, *HA*; et *BH*, *CD* = *CE*, *BH*, ex quo sequitur summam triangulorum seu aream figurae aequari ipsis *AB* in *CE*, seu in differentias *ED*, et denique *AH*, *CD* = *DE*, *BH*. Porro $\frac{CH}{CE} = \frac{HB}{DE} = \frac{CB}{CD}$. Unde rursus fiet *CH*, *DE* = *CE*, *HB*; *HB*, *CD* = *DE*, *CB*, id est area trianguli, ut per se patet, sibi ipsi. Denique *CH*, *CD* = *CE*, *CB*. Quod postremum notabile videtur pro Trochoidibus. Nimirum si curvae *DC* provolutione in plano immoto *CA* puncto *B* constante describatur curva Trochoeides, et posito ordinatam Trochoeidis ad planum immobile *CA* esse *BH*, ipsae *CH* interceptae ad *DC* applicatae summam aequabuntur ipsis *CB* summatis ad suas differentias applicatis. Jam si ordinatae quaedam ad suas differentias applicentur (Fig. 2), idem producetur, ac si quaeratur differentiarum momentum ex axe, id est momentum ac si summa omnium seu maxima in distantiam sui centri gravitatis, id est puncti sui medii ab axe, id est in sui dimidium ducatur, id est aequatur summae talium semiquadrato maximi. Semper ergo habebitur summa omnium *BC* in *CE*, quae aequabitur semper semiquadrato *BC*, sive summae omnium *BP* ad axem applicatarum in *F*, si *CP* perpendicularis ad curvam *DC*.

Fig. 2.

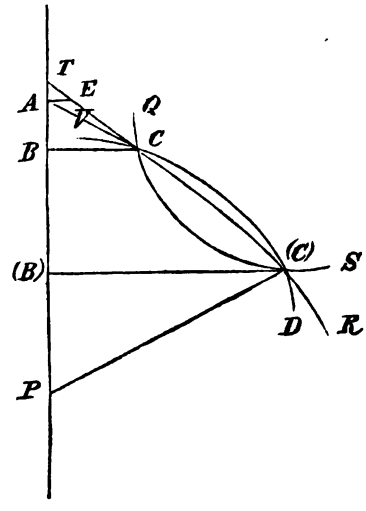


Beilage IV.

22. Nov. 1675.

Methodi tangentium directae compendium calculi, dum jam inventis aliarum curvarum tangentibus utimur. Quaedam et de inversa methodo.

Sub fin. pag. **21. Nov.** notavi quae in mentem venere circa tangentium methodum. Quae huc redit. Sint duae curvae ***ACCR*** et ***QCCS*** se secantes in punctis uno, duobus, pluribusve ***C, C;*** sit axis ***AB(B)***; ordinatae $AB = x$, abscissae $BC = y$; habebimus duas aequationes ad duas lineas, duarum unamquamque incognitarum capitalium. Quod si jam sint earum aequationum radices aequales, seu aequationes duos habeant valores aequales, lineae se tangent. Cartesius jam pro linea ***QCCS***, elegit



arcum circuli ***VCCD,*** cujus centrum ***P,*** ut ***PC*** sit minima quae a puncto ***P*** duci possit. Idem proveniet et saepe simplicius, si sumas non arcum circuli, sed rectam ***TCC*** tangentem, id est maximam quae ex puncto dato ***T*** duci potest ad curvam. Sit $TA = b$, $AE = e$, quasi datae; ***AB, BC*** quaesitae; aequationes duae, una ad curvam ***ACC***, $ax^2 + cy^2 + \text{etc.} = 0$, altera ad lineam rectam ***TCC***, quae erit, quod $\frac{TA}{AE} = \frac{TB}{BC}$ sive $\frac{b}{e} = \frac{b \pm x}{y}$ sive $\pm x = \frac{b}{e}y - b$, sive

$y = \pm \frac{e}{b} x + e$. Ita valor alterutrius incognitarum semper haberi potest pure, adeoque statim sine exaltatione aequationis ad curvam propositam *ACC*, tolli potest, et statim habebitur aequatio ad unicam incognitam, quam superest tantum, ut ad duas radices aequales determinemus. Et hoc sine dubio Slusianae methodi principium est.

Si *VCCD* adhibeatur arcus circuli centro *P*, cum Cartesio, tunc erit aequatio altera ad circulum haec: posito *PC* radio $= s$ et $PB = v - x$, fiet $s^2 = y^2 + v^2 + x^2 - 2vx$. Ex hoc patet nobis electionem esse aut circuli aut lineae rectae, et cum in aequatione curvae datae extat sola quadratica potestas ipsius y, ut in Conicis semper fieri potest, tunc utilius adhiberi aequationes ad circulum, ita enim ope duorum ipsius y^2 valorum statim tolletur incognita x, at pro omnibus aequationibus ad curvas rationali aequatione expressas, utilis methodus ad rectam.

Hinc jam pergo et dico posse non tantum rectam et circulum, sed et quamlibet curvam pro arbitrio assumi, modo notus sit modus ducendi tangentes ad assumtam, ita enim ejus ope inveniri possunt aequationes tangentis ad datam. Hoc jam usus habebit praeclaros tum ad calculos evitandos aut contrahendos, tum ad demonstrationes et constructiones Geometricas elegantes; ita enim itur a curvis facilioribus ad difficiliores, et proposita data aequatione ad unam curvam, semper eligi potest aequatio ad aliam curvam notarum tangentium, cujus ope facillime tollatur una incognitarum. Ut si sit aequatio data $hy^2 + y^3 = cx^3 + dx^2 + ex + f$ ad curvam cujus quaeruntur tangentes; sumatur curva cujus aequatio $hy^2 + y^3 = gx + q$, cujus jam datur tangens, tollendo y fiet aequatio talis $gx + q = cx^3 + dx^2 + ex + f$, quae determinabitur ad duas radices aequales vel Cartesiana methodo per comparationes, vel Huddeniana per arithmeticam progressionem; atque ita tollendo x, invenietur valor ipsius g vel q, et una ex his duabus literis g vel q pro arbitrio sumi potest. Habebitur ergo modus descri-

bendi curvam illam alteram quae datam tangat; ea jam descripta, ad punctum quod ei cum curva proposita commune est, ducatur tangens, quam notam supponimus, ea tangens etiam ipsam curvam propositam tanget. Et credo generaliter hoc modo calculari licebit sumendo semper curvam aliam ut hoc loco fecimus quae unam incognitam plane tollat; hinc credo calculum elegantem derivabimus pro nova tangentium regula, quae adhuc sit Slusiana melior, quae scilicet plane statim alterutram incognitam tollat, quod non facit Slusiana.

Haec jam generalissima amplissimaque facultas sumendi curvam aliquam pro arbitrio, facit ut prope credam hinc aliquid ad *methodum tangentium inversam* et quadraturas duci posse. Nimirum data sit quaedam proprietas tangentium curvae, cujus ordinatarum ad abscissas relatio quaeritur. Inde deduci poterit aequatio, in qua erunt incognitae capitales x, y, et incidentes semper duae v. g. s et v, vel b et e, et similes..... jam aequatione proprietatem tangentium continente, per quam s et v relationem ad tangentes habere exprimatur, sumatur in eam rem quaelibet nova curva pro arbitrio, et s atque v etiam ad ejus tangentes quandam nobis notam habebunt relationem. Ope jam hujus novae aequationis pro arbitrio assumtae, poterimus datam ad tangentes pro curva quaesita mutare, nempe alterutram incognitarum pro lubitu tollendo; et rem in eum statum deducendo, ut facilius appareat calculus inversus. Res eo redit ergo, ut datis tangentium figurae datae proprietatibus examinemus quas eaedem tangentes habeant relationes ad alterius figurae, quae pro data sumitur, ordinatas aut tangentes. Hoc etiam serviet ad figurarum quadraturas ex se invicem ducendas, sed exemplo opus, ut talia clarius intelligantur. Est enim res subtilissimae intricationis.

Beilage V.

26. Jun. 1676.

Nova Methodus Tangentium.

Circa Methodum tangentium directam pariter et *inversam* multa praeclara habeo. Cartesii methodus tangentium nititur duabus radicibus aequalibus, nec locum habet, nisi cum omnes quantitates indeterminatae calculum ingredientes explicabiles sunt per unam, nempe abscissam. At vera methodus tangentium generalis est per differentias. Ut scilicet ordinatarum (directarum vel convergentium) quaeratur differentia. Unde fit, ut etiam quantitates alioqui calculo non subjectae, subjiciantur calculo tangentium, modo earum differentiae sint cognitae. Ut sit aequatio trium indeterminatarum, in qua x abscissa, y ordinata; et z arcus circuli, cujus sinus complementi sit x; verbi gratia aequatio: $b^2y = cx^2 + fz^2$. Pro sequente y inveniendа loco x sumatur $x + \beta$ et pro z sumatur $z - dz$; est autem $d\overline{z} = \frac{\beta r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ posito, et sumemus $z - \frac{\beta^2 r^2}{\sqrt{r^2 - z^2}}$. Ergo $b^2(y) = cx^2 + 2cx\beta + 2c\beta^2 + fz^2 - \frac{2fz\,\beta r}{\sqrt{r^2 - z^2}} + \frac{\beta^2 r^2}{r^2 - z^2}$ Unde jam differentia inter y et (y) erit: $\pm b^2y \mp b^2(y) = +2cx\beta - \frac{2fz\,\beta r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = b^2 d\overline{y}$. Ergo $\frac{dy}{\beta} = \frac{\pm 2cx\sqrt{r^2 - x^2} \pm 2fzr}{b^2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{t}{y}$ $= \frac{t\,b^2}{cx^2 + fz^2}$. Unde et curvae flexus seu sinuatio poterit inveniri, prout scilicet nunc $2cx\sqrt{r^2 - x^2}$, nunc $2fzr$ praevalet, tunc enim incipit ordinata a parte antea erat major, fieri minor, cum aequantur.

Idem est si aliae quoque quantitates indeterminatae plures, ut logarithmus, aliaeque ingrediantur, utcunque sint affectae, ut si sit aequatio: $b^2y = cx^2 + fz^2 + xzl$, posito z esse arcum, l loga-

rithmum, x sinum complementi arcus, y numerum logarithmi, radio et unitate existente b vel r. Idem est, quandocunque indeterminata transcendens ex dimensione quadam vel quadratura inexplorata deducta est.

Caeterum ex his jam praeclara emergunt auxilia pro Methodo tangentium inversa. Nimirum aequationes generales seu indefiniti gradus poterunt fieri, initio quidem ex duabus tantum indeterminatis x et y. Sed si hoc modo res non succedit, quod conditis tabulis, quales expeto, facile apparebit; tunc poterit assumi litera alia una plurèsve; ejusque differentia assumi pro arbitrio formula quaevis, quo facto necesse est utique tandem reperiri formulam qualis desideratur, adeoque curva quae satisfaciat; ejus vero descriptio earum literarum exhibitiones, id est summas differentiarum pro arbitrio assumtarum, postulabit. Inventa semel curva hanc quam postulamus tangentium proprietatem habente, facilius erit postea simpliciores ejus constructiones invenire. Illud quoque commodi habemus ut possimus pluribus uti quantitatibus transcendentibus, sed inter se condependentibus, exempli causa quae omnes ex quadratura Circuli aut Hyperbolae pendeant. Ex his speculationibus etiam apparebit, possintne quadraturae aliae ad quadraturam Circuli et Hyperbolae reduci. Caeterum cum inventio maximorum et minimorum utilis sit ad polygonorum inscriptionem et circumscriptionem, hinc etiam istis transcendentibus magnitudinibus adhibitis poterunt series inveniri convergentes, earumque eodem modo quaeri terminationes; seu quantitates eodem modo compositae. Tametsi tunc non ita facile sit ratiocinari de impossibilitate. Imo vero eodem modo. Tantum non video quomodo possimus invenire an non v. g. ex Circuli quadratura inveniri possit aliqua summa quando nulla quantitas ex circuli magnitudine pendens calculum ingressa est.

Beilage VI.

Jul. 1676.

Methodus tangentium inversa *).

In Tertio Tomo literarum Cartesii video eum credidisse methodum Fermatii de maximis et minimis non esse universalem, putat enim (pag. 362 epist. 63) non servire ad inveniendam tangentem curvae, cujus natura sit ut ex quovis puncto ejus ductae rectae ad quatuor puncta data aequentur rectae datae.

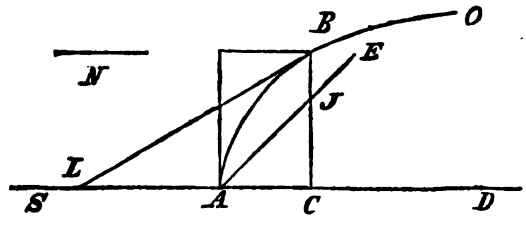
Mons. des Cartes lettre 71 partie 3 pag. 409 à Mons. de Beaune. Je ne croy pas qu'il soit possible de trouver generalement la converse de ma regle pour les touchantes, ny de celle dont se sert Mons. de Fermat, bienque la practique y soit en plusieurs cas plus aisée que la mienne, mais on en peut deduire a posteriori des theoremes qui s'etendent à toutes les lignes courbes qui s'expriment par une equation, en la quelle l'une des quantitez x ou y n'ait point plus de deux dimensions, encor que l'autre en eust mille. Il y a bien une autre façon qui est plus generale et a priori, a sçavoir par l'intersection de deux tangentes, la quelle se doit tousjours faire entre les deux points, ou elles touchent la courbe, tant proches qu'on les puisse imaginer, car en considerant quelle doit estre cette courbe, à fin que cette intersection se fasse tousjours entre ceux points et non au deça ny au dela, on en peut trouver la construction. Mais il y a tout de divers chemins a tenir, et je les ay si peu practiquez que je n'en sçaurois encor faire un bon conte.

Mons. des Cartes parle avec un peu trop de presomtion de la posterité; il dit pag. 449 lettre 77, que sa regle pour resoudre gene-

*) Solvi una die duo problemata methodi tangentium inversae, quorum alterum nec solus solvit Cartesius, alterum ne ipse quidem fassus non posse. Bemerkung von Leibnis.

ralement tous les problemes sursolides a esté sans comparaison la difficile a trouver de toutes les choses qui ont esté inventees jusqu' à present en Geometrie et qui le sera peut estre encor cy apres en plusieurs siecles, si ce n'est que je prenne moy meme la peine d'en chercher d'autres (comme si plusieurs siecles n'estoient capables de produire homme qui pût faire une chose qui ne paroist pas des plus considerables). pag. 459 la question des quatre globes propre à examiner si un homme sçait le calcul. C'est donc de Mons. des Cartes, mais comme elle est dans le livre, elle paroist bien prolixe.

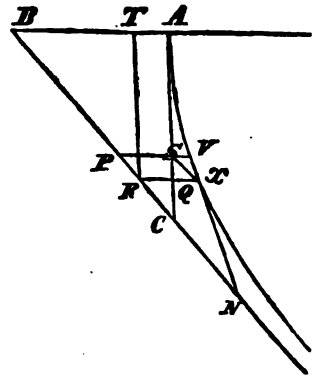
Probleme de la methode inverse des touchantes, que Mons. des Cartes dit avoir resolu Tom. 3. Ep. lettre 79 pag. 460. *EAD* angulus 45 grad. *ABO* curva, *BL* tangens, *BC* ordinata ad CL, ut linea



N ad BJ, $CL = \frac{BC = yn}{BJ = y - x}$, $CL = t$, $t = \frac{ny}{y-x}$, $\frac{n}{t} = \frac{y-x}{y}$ $= 1 - \frac{x}{y}$, $\frac{x}{y} = t - \frac{n}{t}$, $\frac{t}{y} = \frac{\overline{dx}}{dy}$. Ergo $\frac{\overline{dx}}{dy} = \frac{n}{y-x}$, $\overline{dx}\, y - x\,\overline{dx}$ $= \overline{dy}\, n$. Ergo $\int \overline{dx}\, y - \int x\,\overline{dx} = n \int dy$, porro $\int \overline{dy} = y$, $\int x\,\overline{dx} = \frac{x^2}{2}$ et $\int \overline{dx}\, y$ est area *ACBA* et quaeritur curva, in qua area *ABCA* sit $= \frac{x^2}{2} + ny$ seu $= \frac{AC^2}{2} + n\,BC$. Rescindatur ab area hoc $\frac{x^2}{2}$, id est triangulum *ACJ*, debet reliquum *AJBA* aequari rectangulo ny.

Linea quam Beaunius Cartesio quaerendam proposuit, quae huc redibat, ut sit *BC* asymptotos curvae, *BA* axis, *A* vertex

AB, *BC* constantes, nam *BAC* est ad angulos rectos. Sit ordinata *RX*, tangens *XN*, debetque esse *RN* semper constans seu aequalis ipsi *BC*, quaeritur natura curvae. Hic ita procedendum ego putem; sit alia ordinata *PV*, differens a priore *RX* recta *SV*, ducendo scilicet ipsi *RN* parallelam *XS*, erunt triangula *SVX* et *RXN* similia, $RN = t = c$ constanti, $PR = SX = \beta = d\overline{x}$, $BR = x$, $RX = y$, $SV = dy$, fiet $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{y}{t=c}$. Ergo $cy = \int y d\overline{x}$ sive $c d\overline{y} = y d\overline{x}$. *Sit AQ* vel $TR = z$



et sit $AC = f$, cum fuerit $BC = a$, fiet $\frac{AC}{BC} = \frac{f}{a} = \frac{TR}{BR} = \frac{z}{x}$. Ergo $x = \frac{az}{f}$. Si $d\overline{x}$ constans, erit et $d\overline{z}$ constans. Ergo $c\,dy = \frac{a}{f} y d\overline{z}$ vel $cy = \frac{a}{f} \int y d\overline{z}$, $cy d\overline{y} = \frac{a}{f} y^2 d\overline{z}$, ergo $c \frac{y^2}{2} = \frac{a}{f} \int y^2 d\overline{z}$; habetur ergo et area figurae et momentum quodammodo (addendum enim aliquid ob obliquitatem) et $cz d\overline{y} = \frac{a}{f} yz d\overline{z}$, ergo erit $c \int z d\overline{y} = \frac{a}{f} \int yz d\overline{z}$, $\frac{c d\overline{y}}{y} = \frac{a}{f} d\overline{z}$. Ergo $c \int \frac{d\overline{y}}{y} = \frac{a}{f} z$. Est autem ni fallor $\int \frac{d\overline{y}}{y}$ semper in potestate. Res tota eo redit ut inveniamus curvam in qua redeat ordinata, fiat differentiis ordinatarum per abscissas divisis ejusque figurae quadraturam. $d\overline{\sqrt{ay}} = \frac{1}{\sqrt{ay}}$. Quaerendae ejusmodi figurae quarum ordinatae: $\frac{dy}{y}$, $\frac{dy}{y^2}$, $\frac{dy}{y^3}$, quemadmodum eas

habeo quarum ordinatae $y\,dy$, $y^2\,d\overline{y}$ etc. $\frac{\omega}{a} = \frac{d\overline{y}}{y}$ quoniam $d\overline{y}$ potest intelligi constans $= \beta$, hinc curva in qua $\frac{\omega}{a} = \frac{d\overline{y}}{y}$ dabit $\omega y = a\beta$, quae foret hyperbola. Figura ergo, in qua $\frac{dy}{y} = z$, est hyperbola quomodocunque explices y, at si y explices per φ^2, fiet $dy = 2\varphi$ et $\frac{2\varphi}{\varphi^2} = \frac{2}{\varphi}$. Jam $\frac{c}{f}\int\frac{dy}{y} = \frac{a}{f}z$, ergo $\frac{fc}{a}\int\frac{1}{y} = z$, quae est ad logarithmicam.

Ita solvimus omnia problemata methodi tangentium inversae quae extant in tomo 3. Epistolarum Cartesii, quorum unum solvit ipse, ut ait pag. 460 Epist. 79 Tom. 3; sed solutio non extat; alterum solvere tentavit, sed non potuit, fassus irregularem esse lineam et discriptione utendum esse, quae utique non est in humana potestate; imo nec angelica nisi aliunde constet ars describendi.

Beilage VII.

Huddius mihi ostendit se jam anno 1662 habuisse Quadraturam Hyperbolae, quam deprehendi esse illam ipsam, quam Mercator quoque de suo invenit et publicavit. Ostendit mihi Epistolam ad quendam van Duck, ni fallor, Leidam ea de re scriptam. Ejus methodus Tangentium Slusiana in ea est amplior, quod etiam, quemadmodum in simplici aequatione, quamlibet progressionem Arithmeticam adhibere potest, cum Slusius aliique tantum una uti possint. Hinc possunt constructiones reddi simplices, dum pro arbitrio tolluntur termini. Hoc etiam servire potest ad facilius tollendam literam aliquam, ita enim plurimae habentur omnigenaeque aequationes ad tollendum aptae

$$\begin{array}{rrr} x^3 + px^2 + qx & = 0 \\ y & y. & y \\ & y^2 & y^2 \\ & & y^3 \\ \hline 3x^2 + 2px^1 + qx & 0 \\ 2yx^2 + yx \\ + y^2x \end{array}$$

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + a = 0$$
$$2x\overline{dx} + x\overline{dy} + 2y\overline{dy} + \overline{dx} + \overline{dy} = 0$$
$$y\overline{dx}$$
$$\frac{t}{y} = \frac{\overline{dx}}{\overline{dy}} = \frac{x + 2y + 1}{y + 2x + 1}$$

Quod notaveram de Numeris Triangularibus pro tribus radicibus aequalibus, et Pyramidalibus pro quatuor, id ipsi dudum innotuit imo etiam generalius — 1 0 1 2 3 4 5 6

— 3 — 1 0 0 1 3 6 10 15

— 4 — 1 0 0 0 1 4 10 20

Ubi notandum crescere numerum ipsorum 0, quod praeclari est usus ad destruendum.

Habet et regulas multiplicandi aequationes ita ut non determinentur tantum ad radices aequales, sed et ad radices arithmetice crescentes, vel geometrice, vel alia progressione utentes.

Habet Huddenius elegantissimum duarum curvarum extra et intra circulum descriptionem, quae sunt quadrabiles, et per ipsas tam prope invenitur vera circuli area, ut ope dodecagoni in sex ciphris tantum tres desint unitates seu $\frac{3}{100,000}$.

Habet et methodum inveniendi radices reales aequationis partim reales partim impossibiles habentis, ope alterius aequationis totidem habentis radices reales, quot prior habebat ex realibus et imaginariis mixtas.

Elegans habebat specimen inveniendi summas serierum per substractiones Geometricae progressionis repetitas. Nimirum subtrahit progressiones Geometricas, quarum summae sunt etiam progressionis Geometricae, atque ita summa summarum haberi potest; atque ita habetur summa seriei. Praestitit hoc in serie cujus numeratores

sunt arithmetici, et nominatores geometrici, ut $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{16}$. Tres habet series, qualis Wallisiana, pro interpolationibus circuli. Ait non esse plures, illa puto methodo.

Potest et quadraturas irrationalium statim scribere persaepe, ut et tangentes, non tollendo irrationales aut fractiones etc.

Beilage VIII.

Novembr. 1676.

Calculus Tangentium differentialis.

$$\overline{dx} = 1 \quad \overline{dx} = 2x \quad \overline{dx^3} = 3x^2 \text{ etc.}$$

$$\overline{d\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \quad \overline{d\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{x^2} \quad \overline{d\frac{1}{x^3}} = -\frac{3}{x^2} \text{ etc.}$$

$$\overline{d\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ etc.}$$

Ex his colligitur regula generalis haec pro differentiis ac summis simplicium potestatum

$$\overline{dx^e} = e,x^{e-1} \text{ et contra } \int \overline{x^e} = \frac{x^{e+1}}{e+1}.$$

Unde $\overline{d\frac{1}{x^2}}$ seu $\overline{dx^{-2}}$ erit $-2x^{-3}$ seu $\frac{2}{x^3}$

et $\overline{d\sqrt{x}}$ seu $dx^{\frac{1}{2}}$ erit $-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ seu $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$.

Sit $y = x^2$, et erit $\overline{dy} = 2x\overline{dx}$, ergo $\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} = 2x$ *). Quae ratio-

---

*) Am Rande des Manuscripts hat Leibniz bemerkt: Praelara haec observatio est ad calculum meum differentiarum, si sit $b,y\overline{dx} + x\overline{dy} + \text{etc.} = 0$ fore $by\overline{x} + \int \text{etc.} = 0$, et ita de caeteris. Videndum, quid de h^3 faciendum. Ad istos calculos melius faciendos poterit aequatio $ay^2 + byx + cx^2 + \text{etc.}$

cinatio est generalis, nec refert quae sit progressio ipsarum x. Eodemque modo generalis regula ita stabit: $\frac{d\overline{x^e}}{dx} = ex^{e-1}$ et vicissim $\int \overline{x^e\, dx} = \frac{x^{e+1}}{e+1}$.

Sit aequatio quaelibet, v. g.

$ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 = 0$ et pro y scribendo $y + \overline{dy}$ ac pro x similiter $x + \overline{dx}$*), fiet omissis omittendis alia aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 = 0 \\ \hline a\,2\overline{dy}\,y + by\,\overline{dx} + 2cx\,\overline{dx} + f^2\,\overline{dx} + g^2\,\overline{dy} \\ \qquad + bx\,\overline{dy} \\ \hline a\,\overline{dy}^2 + b\,\overline{dx}\,\overline{dy} + c\,\overline{dx}^2 = 0 \end{array}\right\} = 0$$

Quae est regulae a Slusio publicatae origo. Eam vero ita in infinitum amplificabimus: Sint literae quotcunque, et ex iis composita formula, verbi gratia ex literis tribus sit formula:

$ay^2 \quad bx^2 \quad cz^2 \quad fyx \quad gyz \quad hxz \quad ly \quad mx \quad nz \quad p = 0$

Unde fiet alia aequatio:

$$\begin{array}{llllllllll} ay^2 & bx^2 & cz^2 & fyx & \text{simi-} & ly & mx & \text{simi-} & p \\ \hline 2a\overline{dyy} & 2b\overline{dxx} & 2c\overline{dzz} & fy\overline{dx} & \text{liter} & l\overline{dy} & m\overline{dx} & \text{liter} & \\ & & & fx\overline{dy} & & & & & \\ \hline a\overline{dy}^2 & b\overline{dx}^2 & c\overline{dz}^2 & fdx\overline{dy} & & & & & \end{array}$$

---

transmutari in aliam alia curvae relatione, et comparabitur proveniens, alio differentiarum calculo, cum eo quod per istum prodit.

*) Leibniz hat am Rande bemerkt: Alterutra ex his $\overline{dx}$ vel $\overline{dy}$ pro arbitrio explicari potest, adhibita aequatione nova, et alterutra harum $\overline{dx}$ vel $\overline{dy}$ sublata et x scilicet vel y aliter per quantitates explicanda. Verum non puto id esse, quia catalogus omnium curvarum quadrabilium prodire debet, alterutram sumendo constantem.

Unde patet eadem methodo haberi tangentia superficierum plana, et alioqui nihil referre an non ipsae literae x, y, z aliquam habeant cognitam relationem, ea enim postea substitui potest.

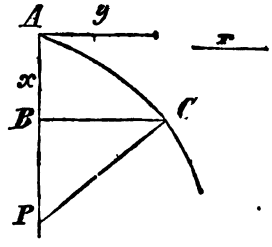
Hinc praeclare serviet eadem methodus, etsi compositae fractiones aut irrationales calculum ingrediantur, nec opus est earum tollendarum causa caetera exaltari, cum potius ipsarum differentiae separatim inveniri ac substitui possint: deinde cum methodus tangentium publicata non nisi tunc procedat, cum ordinatae parallelae sunt, ista et ad tangentes et alias quascunque, imo illas quoque relationes accommodari potest, quae sunt ordinatarum ad curvarum portiones aut in quibus angulus ordinatarum certa lege mutatur. Caeterum speciatim operae pretium erit rem ad irrationales ac fractiones compositas accommodare.

$\overline{d\sqrt[2]{a+bz+cz^2}}$, ponatur $a+bz+cz^2=x$, et $\frac{\overline{d\sqrt[2]{x}}}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$, jam $\frac{\overline{dx}}{dz} = b+2cz$: ergo $\overline{d\sqrt[2]{a+bz+cz^2}} = -\frac{b+2cz}{2\overline{dz}\sqrt{a+bz+cz^2}}$.

Sumta aequatione duarum literarum x, y pro curva, et determinata aequatione ad tangentes, tolli potest alterutra ipsarum x et y, ita ut restet altera tantum una cum $\overline{dx}$ et $\overline{dy}$, quod per omnes casus calculari operae pretium est.

Datis tribus literis, ut x, y, z, et valore ipsius $\overline{dz}$ ope ipsius x vel y (vel etiam utriusque) expresso, habebitur denique aequatio tangentium, in qua erit etiam tantum alterutra harum x et y et duae $\overline{dy}$, $\overline{dx}$; aliquando et ipsa z non poterit tolli. Hoc etiam per omnes casus assumti valoris ipsius $\overline{dz}$ deduci potest, eodem modo plures adhuc literae assumi possunt. Et conjunctis in unum calculis universalibus omnibus, universalissimus ex ipsis fiet. Caeterum assumtio plurimarum literarum usum habere potest ad methodi tangentium inversae problemata ope quadraturarum solvenda. Ut si propositum sit problema solvere, in quo summa rectarum CB, BP sit data seu

$y + \frac{y\overline{dy}}{dx} = xy$, fiet $\overline{dx} + \overline{dy} = x\overline{dx}$ seu $x + y = \frac{x^2}{2}$. Ita habemus curvam in qua summa earum $CB + BP$ (in constantem r) aequatur rectangulo ABC.

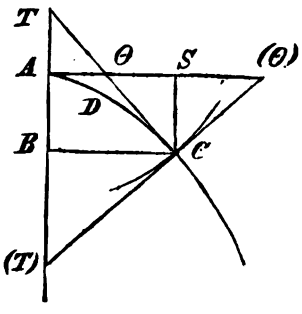


Beilage IX.

11. Julii 1677.

Methode generale pour mener les touchantes des Lignes Courbes sans calcul, et sans reduction des quantités irrationelles et rompues.

Monsieur Slusius a publié la methode pour trouver sans calcul les touchantes des lignes courbes, dont l'equation est purgée des quantités irrationelles ou rompues. Par exemple une courbe DC estant donnée, dont l'equation exprime la relation de BC ou AS que nous appellerons y, à AB ou SC, (T) appellée x, soit



$$a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + kx^3 + ly^3 \text{ etc.} = 0$$

on n'a qu'à écrire

$$0 + b\xi + cv + dxv + 2ex\xi + 2fyv + gx^2v + hy^2\xi + 3kx^2\xi + 3ly^2v$$
$$+ dx\xi \qquad + 2gxy\xi + 2hxyv$$
$$+ mx^2y^2 + mx^3y + pxy^3 + qx^4 + ry^4$$
$$+ 2mx^2yv + nx^3v + py^3\xi + 4qx^3\xi + 4ry^3v$$
$$+ 2mxy^2\xi + 3nx^2y\xi + 3py^2xv$$

c'est à dire changeant l'equation en analogie:

$$\frac{\xi}{v} = \frac{c + dx + 2fy + gx^2 + 2kxy + 3ly^2 + 2mx^2y}{b + dy + 2ex + 2gxy + hy^2 + 3kx^2 \text{ etc.}}$$

et supposant que $\frac{\xi}{v}$ cxprime la raison $\frac{TB}{BC, a}$ ou $\frac{CS, y}{S\Theta}$, l'on aura TB, ou $S\Theta$, en supposant BC et SC données. Lorsque la valeur des grandeurs determinées b, c, d, e etc. avec leur signes, fait de la valeur $\frac{\xi}{v}$ une grandeur negative, la touchante ne sera pas CT, qui va vers A commencement de l'abscisse AB, mais $C(T)$ qui s'en éloigne. Voila tout ce qu'on en a publié jusqu' icy, aisé à entendre à celuy qui est versé en ces matieres. Mais lors qu'il y a des grandeurs irrationelles ou rompues, qui enferment x, ou y, ou toutes deux, on ne peut se servir de cette methode, que par reduction de l'equation donnée à une autre delivrée de ces grandeurs. Mais cela grossit horriblement le calcul quelques fois, et nous oblige de monter à des dimensions tres hautes, et à des equations, dont la depression souvent est tres difficile. Je ne doute pas que ces Messieurs*) que je viens de nommer ne sçachent le remede, qu'il y faut apporter, mais comme il n'est pas encor public, et que je croy qu'il est connu de peu de personnes, outre qu'il donne la derniere perfection au probleme que M. des Cartes disoit avoir le plus cherché de tous les autres de la Geometrie, à cause de son utilité, j'ay jugé à propos de le publier.

Soit une formule ou grandeur ou equation, comme par exemple celle que dessus $a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$ etc. appellons la par abregé ω et ce qui proviendra lors qu'elle sera traité comme cy dessus; sçavoir $b\xi + cv + dxv + dy\xi$ etc. sera appellé $d\overline{\omega}$, de meme si la formule seroit λ ou μ, le provenu seroit $d\overline{\lambda}$ ou $d\overline{\mu}$ et ainsi dans

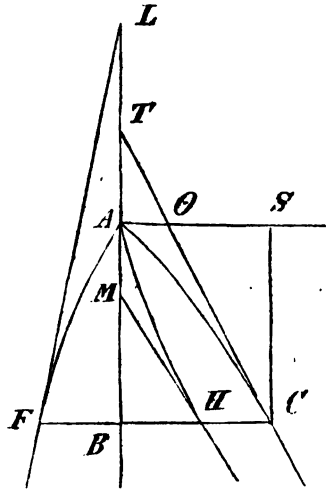
*) Leibniz hatte zu Anfang: Hudde, Slusius, et autres geschrieben; später hat er das Uebrige, ausser Slusius, durchgestrichen.

toutes les autres. Soit maintenant la formule ou equation ou grandeur ω egale à $\frac{\lambda}{\mu}$, je dis que $\overline{d\omega}$ sera égale à $\frac{\mu\overline{d\lambda} - \lambda\overline{d\mu}}{\mu^2}$. Cela suffit pour manier les fractions.

Enfin soit ω égale à $\sqrt[z]{\omega}$, je dis que $\overline{d\omega}$ sera égale à $\frac{\overline{d\omega}}{z\sqrt[z]{\omega^{z-1}}}$ ce qui suffit pour traiter comme il faut les grandeurs irrationelles.

Algorithme de l'analyse nouvelle de maximis et minimis, ou des touchantes.

Soit $AB = x$, $BC = y$, $T\Theta C$ la touchante de la courbe AC, et la raison $\frac{TB}{BC=y}$ ou $\frac{SC=x}{S\Theta}$ sera appellée $\frac{\overline{dx}}{\overline{dy}}$. Soyent deux ou plusieurs autres courbes AF, AH, et posant $BF = v$, $BH = \omega$, et la droite FL touchante de la courbe AF, et MH de la courbe AH, et $\frac{LF}{FB} = \frac{\overline{dx}}{\overline{dv}}$ et $\frac{MH}{BH} = \frac{\overline{dx}}{\overline{d\omega}}$, je dis que $\overline{dy}$ ou $\overline{dv\omega}$ sera égal à $v\overline{d\omega} + \omega\overline{dv}$; estant $v = \omega = x$ et $y = v\omega = x^2$, alors pour v et ω substituant x, nous aurons $\overline{dv\omega} = 2x\overline{dx}$.



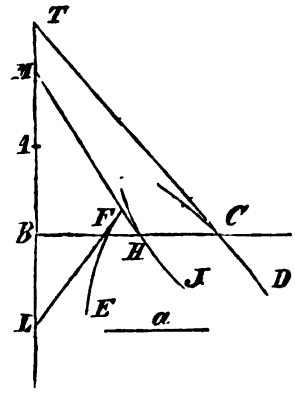
(Tout cela reussira aussi si l'angle ABC est aigu ou obtus, item s'il est infiniment obtus, c'est à dire si TAC est une ligne droite.)

Von diesem Entwurfe ist folgende Umarbeitung vorhanden, die offenbar um dieselbe Zeit fällt:

Mons. Fermat a trouvé le premier une Methode qui pouvoit estre rendue generale, pour mener les droites qui touchent les lignes courbes analytiques. Mons. des Cartes s'y est pris d'un autre biais; mais le calcul qu'il prescrit est un peu prolixe. Mons. Hudde a trouvé un abregé merveilleux en multipliant les termes de l'equation par celles de la progression arithmetique. Il ne l'a publié que pour les equations d'une seule inconnue; quoy qu'il l'ait eu pour celles de deux indeterminées. C'est donc à Mons. Slusius que le public en est obligé; et apres cela plusieurs ont crû que cette matiere estoit épuisée. Mais toutes ces methodes publiées supposent *l'equation reduite* et purgée des fractions et irrationelles, je parle de celles dans les quelles les indeterminées sont comprises. Cependant j'ay trouvé moyen d'eviter ces reductions inutiles, qui font grossir le calcul horriblement et qui nous obligent de monter à des dimensions tres hautes, dont il faut chercher par apres la depression avec bien de la peine, au lieu qu'icy tout se trouve fait des le premier coup. Cette Methode a encor plus d'avantage sur toutes celles qui ont esté puliées, que celle de Mons. Slusius a sur les autres, par ce qu' autre chose est de donner un simple abregé de calcul, autre chose est retrancher les reductions et depressions. A propos de la publier, à cause de la grande étendue de cette matiere que Mons. des Cartes luy meme a jugé estre la plus utile partie de la Geometrie et dont il a souhaitté le plus de venir à bout, mais pour m'expliquer nettement et succinctement, je suis obligé d'introduire de *nouveaux caracteres* et de leur donner un *Algorithme nouveau*, c'est à dire des regles toutes particulieres, pour leur addition, soustraction, multiplication, division, puissances, racines, equations.

Explication des caracteres. Soyent plusieurs courbes comme ***CD, FE, HJ,*** rapportées à un meme Axe ***AB*** par les ordonnées à un meme point ***B,*** sçavoir ***BC, BF, BH.*** Les touchantes des cour-

bes *CT*, *FL*, *HM*, coupant l'axe dans les points *T*, *L*, *M*; le point *A* dans l'Axe est fixe, le point *B* change avec les ordonnées. Appellons *AB*, *x*; *BC*, *y*; *BF*, ω; *BH*, *v*; et la raison *TB* à *BC* soit appellée $\overline{dx}$ à $\overline{dy}$ et la raison $\frac{LB}{BF}$ sera $\frac{\overline{dx}}{\overline{d\omega}}$ et la raison *MB* à *BH* sera $\overline{dx}$ à $\overline{dv}$. Si *y* valoit $v\omega$ par exemple, nous dirions $\overline{dv\omega}$ au lieu de $\overline{dy}$, et ainsi dans tous les autres exemples. Soit *a* une droite constante, alors si *y* valoit *a*, c'est à dire si la ligne *CD* estoit une droite parallele à *AB*, $\overline{dy}$ ou $\overline{da}$ servit 0, ou égal à rien. Si la grandeur $\frac{\overline{dx}}{\overline{d\omega}}$ se trouvoit negative, alors *FL*, au lieu d'estre menée vers *A*, au dessus de *B*, sera menée en sens contraire au dessous de *B*.



Addition et Soustraction. Soit *y* egale à $v \pm \omega$ $(\pm)$ *a*

$\overline{dy}$ sera egal à $\overline{dv} \pm \overline{d\omega}$ $(\pm)$ 0.

Multiplication. Soit *y* egale à $av\omega$, $\overline{dy}$ ou $\overline{dav\omega}$ ou $a\overline{dv\omega}$ sera $av\overline{d\omega} + a\omega\overline{dv}$.

Division. Soit *y* egale à $\frac{v}{a\omega}$, $\overline{dy}$ ou $\overline{d\frac{v}{a\omega}}$, ou $\frac{1}{a}\overline{d\frac{v}{\omega}}$ sera

$$\frac{\omega\overline{dv} - v\overline{d\omega}}{a\omega^2}.$$

La regle des puissances et racines n'est qu'une meme en effet.

Puissances. *y* égale à ω^z (supposant *z* un certain nombre) et $\overline{dy}$ sera $z\omega^{z-1}\overline{d\omega}$.

Racines ou extractions. $y = \sqrt[z]{\omega}$, et $\overline{dy}$ sera $\frac{\overline{d\omega}}{z\sqrt[z]{\omega^{z-1}}}$.

Equations concues en termes rationaux et entiers.

$$a + bv + cy + tvy + ev^2 + fy^2 + gv^2y + hvy^2 + kv^3 + ly^3 + mv^2y^2 + nv^3y + pvy^3 + qv^4 + ry^4 = 0,$$

supposant a, b, c, t, e, etc. grandeurs connues et determinées, et nous aurons

$$0 = b\overline{dv} + c\overline{dy} + tv\overline{dy} + 2ev\overline{dv} + 2fy\overline{dy} + gv^2\overline{dy} + hy^2\overline{dv} + 3kv^2\overline{dv} + ty\overline{dv} + 2gvy\overline{dv} + 2hvy\overline{dy} + 3ly^2\overline{dy} + 2mv^2y\overline{dy} + nv^3\overline{dy} + py^3\overline{dv} + 4qv^3\overline{dv} + 4ry^3\overline{dy} + 2mvy^2\overline{dv} + 3nv^2y\overline{dv} + 3pvy^2\overline{dy}$$

Cette regle se peut demonstrer et continuer à l'infini par les regles precedentes, car si $a + bv + cy + tvy + ev^2 + fy^2 + gv^2y$ etc. $= 0$ $\overline{da} + \overline{dby} + \overline{dcy} + t\overline{dvy} + e\overline{dv^2} + f\overline{dy^2} + g\overline{dv^2y}$ sera aussi $= 0$. Or $\overline{da} = 0$, $\overline{dbv} = b\overline{dv}$, $\overline{dcy} = c\overline{dy}$, $\overline{dvy} = v\overline{dy} + y\overline{dv}$, et $\overline{dv^2} = 2v\overline{dv}$, parceque dv^2 egal à z, v^{z-1}, dv, c'est à dire (au lieu de z substituant 2) $2v\overline{dv}$, et $\overline{dv^2y} = v^2\overline{dy} + 2vy\overline{dv}$, car posons $\omega = v^2$, et $\overline{dv^2y}$ sera $\overline{d\omega y}$, or $\overline{d\omega y} = y\overline{d\omega} + \omega\overline{dy}$ et $\overline{d\omega}$ ou $\overline{dv^2} = 2v\overline{dv}$, donc dans la valeur de $\overline{dv\omega}$ substituant au lieu de ω et $\overline{d\omega}$ leur valeur trouvée, nous aurons $\overline{dv^2y} = v^2\overline{dy} + 2vy\overline{dv}$, comme auparavant. Cela suffit pour aller à l'infini. Si dans l'equation donnée $a + bv + cy$ etc. $= 0$ la grandeur v estoit égalé à x, c'est à dire si la ligne JH estoit une droite, la quelle continuée tomboit dans le point A, à angle demydroit, alors l'equation provenante changée en analogie donneroit la regle de la Methode des Tangentes, publiée par Mons. Slusius, la quelle par consequent n'est qu'un cas ou corollaire de la methode generale.

Les Equations embarassées de quelle maniere que l'on voudra par des fractions et irrationelles, pourront estre traitées de même sans aucun calcul en supposant le nominateur de la fraction ou la grandeur dont il faut tirer la racine egales à une grandeur ou lettre, que l'on traitera selon les regles susdites. Et quand il y a des

grandeurs qui doivent estre multipliées l'une par l'autre, on n'a pas besoin de faire cette multiplication effectivement, ce qui épargne encor beaucoup de travail. Un seul exemple suffira:

(Das Folgende scheint später hinzugefügt zu sein.)

Au reste cette methode sert aussi lors que les Courbes ne sont pas purement analytiques, et lors même leur nature n'est pas expliquée par des telles ordonnées, et de plus elle donne une facilité merveilleuse pour les constructions geometriques. La veritable raison d'un abregé si admirable, et qui nous fait eviter toutes les reductions des fractions et irrationelles est que l'on peut tousjours obtenir par les regles precedentes que les lettres $d\overline{y}$, $d\overline{v}$, $d\overline{\omega}$, et semblables se trouvent hors du nominateur de la fraction, et hors du vincule de la racine.

Berichtigungen.

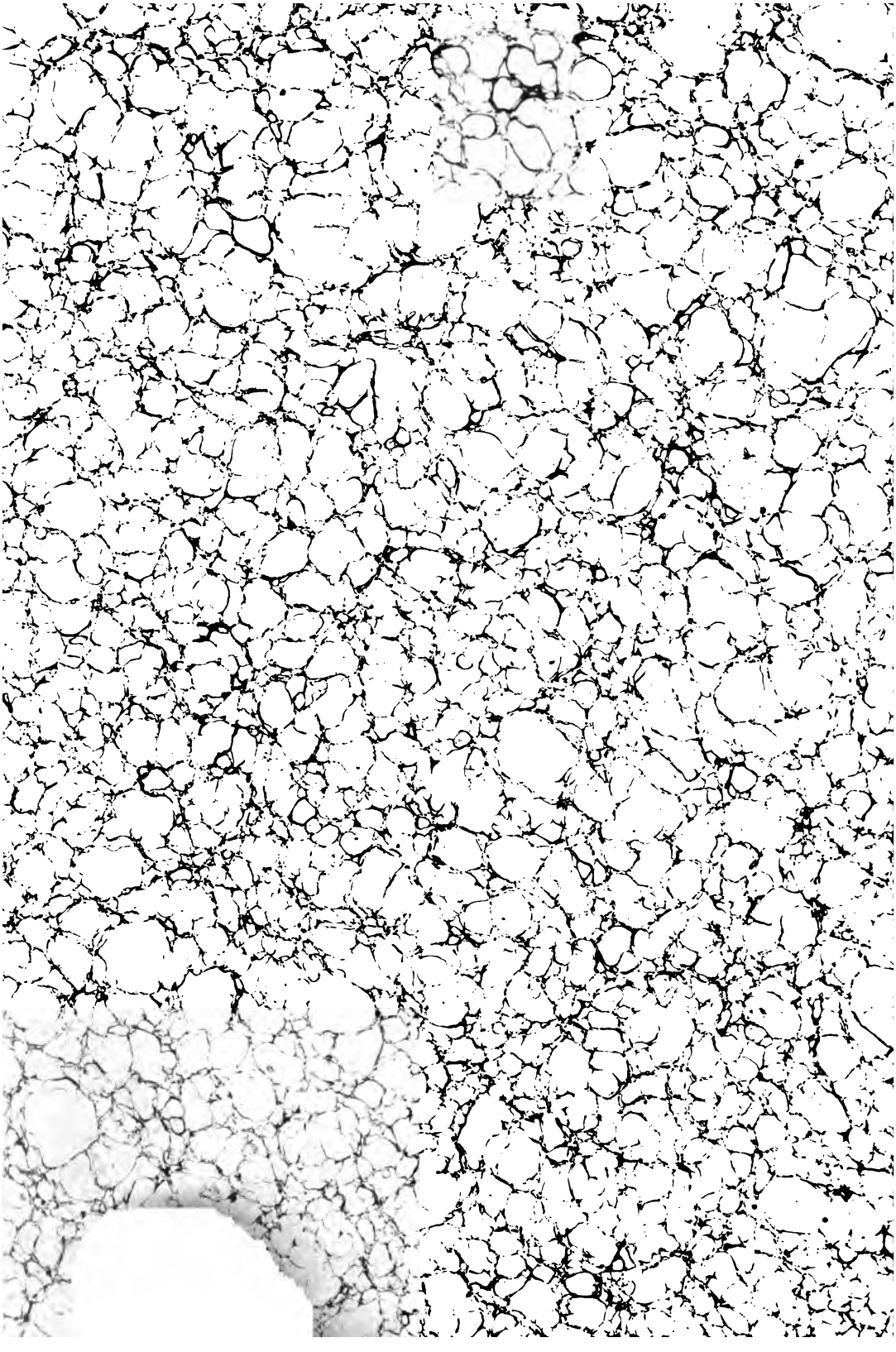
Seite 32 Zeile 4 von unten muss es heissen: ita ut ipsae AD abscissae ex axe $AD(D)$ sint ipsis BC ordinatis ad axem $AB(B)$ aequales, erunt et CD ordinatae ad axem $AD(D)$ aequales ipsis AB abscissis ex axe $AB(B)$.

- 34 - 5 von unten und S. 35 Zeile 2 von oben ist für e zu setzen e.
- 36 - 1 ist vor tamen einzuschalten nec.
- 38 - 7 muss es heissen: $dx = + c\beta$ und $dyddx = \overline{2z + b}\, c\beta^2$.
- 43 - 5 muss es heissen: $d\overline{xy} = d\overline{xy} - xd\overline{y}$.
- 45 - 6 ist zu setzen: $AH, CD = DE, BA$.
- 49 - 10 von unten muss es heissen: $z - \frac{\beta r}{\sqrt{r^2 - z^2}}$.
- 56 - 9 muss es heissen: $d\overline{x^2} = 2x$.
- 56 - 15 ist zu lesen: seu $-\frac{2}{x^3}$.

Alle übrigen Unrichtigkeiten in Beilage VIII. finden sich im Original; ich habe sie nicht verbessert, um das Original treu wieder zu geben.

- 62 - 19 muss gelesen werden: publiées.

Gebauersche Buchdruckerei in Halle.



3 2044 020 573

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

3069417

BOOK DUE-WID

MAY 17 1979

CANCELLED

APR 19 1979

WIDENER

APR 27 1997

BOOK DUE

CANCELLED